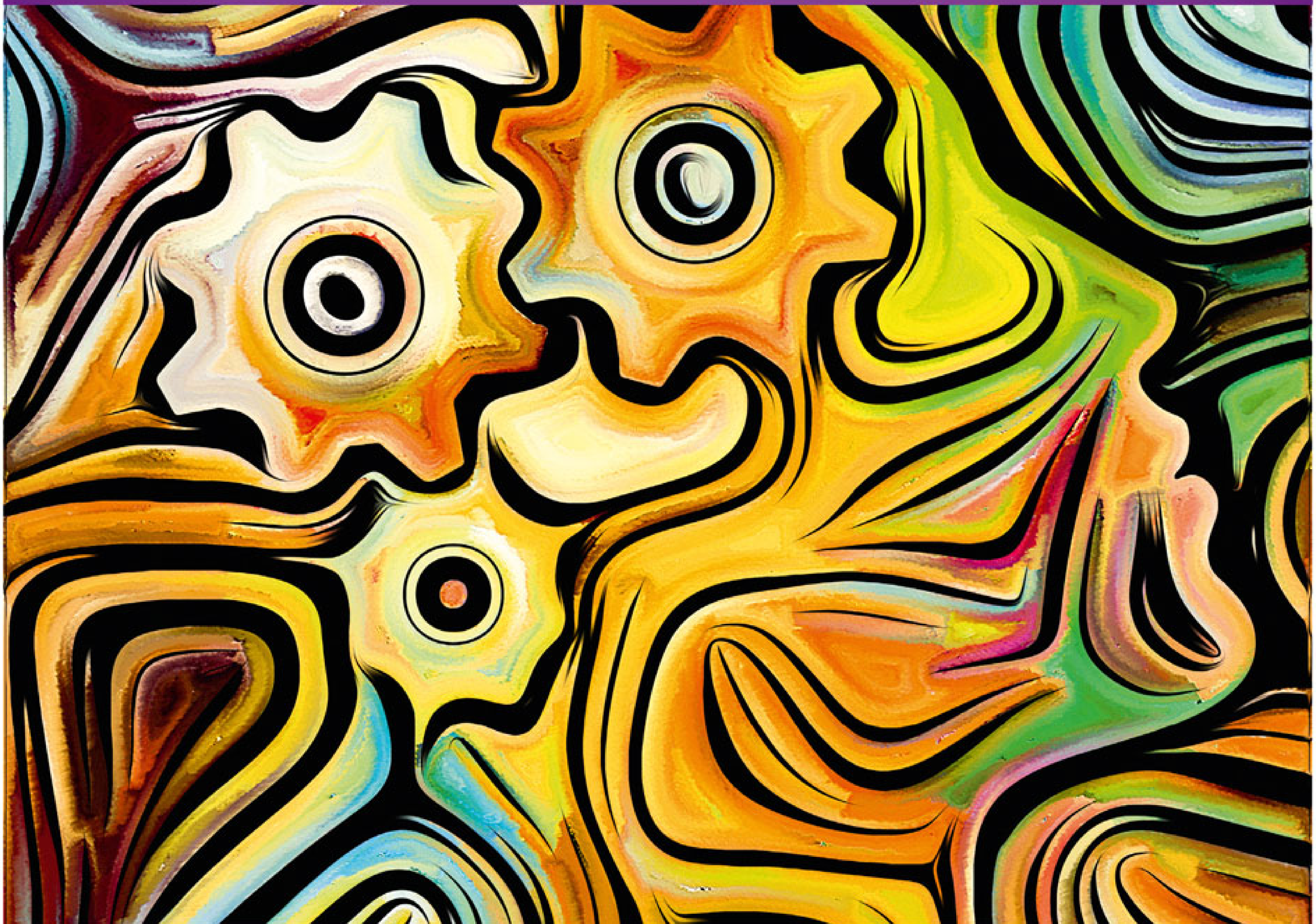
Jérôme Fehrenbach



# Mathématiques, raisonnement et mystification

Comment décrypter les fausses informations

ellipses

# 1

# Mise en jambe

Faire des mathématiques, cela consiste avant tout à utiliser son bon sens, et raisonner par analogie. Cela n'est pas plus difficile que de ranger les couverts dans un tiroir, et de mettre les couteaux, les fourchettes et les cuillères dans leurs cases respectives. La différence est qu'en mathématiques les objets sont formalisés c'est-à-dire que leur définition et les règles d'utilisation sont codifiées. Il suffit donc de connaître quelques notions et un peu de vocabulaire. Notons que ce point de vue concerne les mathématiques que la majorité des gens peuvent utiliser. Bien entendu les professionnels ont besoin de notions pointues qui peuvent s'appréhender après de longues études, et leurs découvertes nécessitent de l'intuition et des techniques de raisonnement raffinées. Les innovations majeures proviennent souvent de l'adoption d'un point de vue nouveau, ce qui n'est possible qu'avec du recul apporté par l'expérience.

Dans la première partie de cet ouvrage nous allons effectuer quelques promenades dans les mathématiques accessibles, sans connaissance technique particulière. Ces promenades nécessiteront un petit peu de prérequis, tout comme une sortie dans les bois demande d'avoir des chaussures bien lacées et de savoir suivre un sentier. Nous n'allons pas entraîner le lecteur sur des sentiers périlleux de haute montagne, mais il faut quand même une préparation pour profiter pleinement de la suite.

**Nombres, opérations**

Les premiers contacts des enfants à l'école avec les mathématiques concernent les nombres et le calcul. On sait ce que sont les opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division. Un peu de terminologie : lorsque l'on effectue une addition, le résultat s'appelle la *somme* et chacun des éléments est un *terme*. Lorsque l'on effectue une multiplication, le résultat est un *produit* et chaque élément est un *facteur*.

Nous utiliserons les nombres appelés nombres réels, sans faire appel à leurs propriétés précises. Il faudra cependant savoir qu'un nombre peut être positif ou négatif. Les nombres négatifs servent à représenter des quantités qui sont plus petites que zéro, par exemple une température plus froide que zéro, ou un solde débiteur sur un compte bancaire.

La règle de calcul qu'il faudra avoir à l'esprit est celle qui concerne le signe d'un produit. Lorsque l'on multiplie entre eux deux nombres positifs, on obtient un nombre positif. Lorsqu'un produit fait intervenir des quantités négatives la règle est la suivante :

➢ produit d'un nombre négatif par un nombre positif : le résultat est négatif,

➢ produit de deux nombres négatifs : le résultat est positif.

Ces règles peuvent se résumer dans le tableau suivant :

| signe du premier facteur | signe du 2$^{e}$ facteur | signe du produit |
|---|---|---|
| + | + | + |
| + | - | - |
| - | + | - |
| - | - | + |

Il est d'usage courant en mathématiques de représenter des quantités par des lettres. Cette pratique est sans doute la plus déroutante et contribue peut-être à détourner un certain nombre de personnes des mathématiques qui sont persuadées que « les mathématiques c'est trop abstrait je n'y comprends rien ». Notre point de vue est que, bien entendu certaines pratiques sont hors de portée des non spécialistes mais qu'un petit aperçu nécessitant quelques notions élémentaires est accessible à tout le monde. Et pour pouvoir avancer un peu il est beaucoup plus simple d'utiliser la facilité de notation consistant à utiliser des lettres. Voyons ci-dessous un exemple.

Les opérations élémentaires vérifient la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cela signifie que par exemple

$$2 \times (5 + 3) = 2 \times 5 + 2 \times 3. \tag{1.1}$$

Cette propriété est « évidente » si on interprète ce qu'est une multiplication : j'ai 2 tas dans lesquels il y 5+3 objets. Je peux ré-organiser mes objets en d'un côté 2 tas de 5 objets, et d'un autre côté 2 tas de 3 objets. Comme le nombre total d'objets n'a pas changé l'égalité ci-dessus numérotée (1.1) est vraie. On se rend compte en effectuant le même raisonnement que la propriété (1.1) doit être vraie si on remplace 5 et 3 par n'importe quels autres nombres. Et si on remplace 2 par n'importe quel autre nombre l'égalité est encore vraie. Il est impossible d'écrire toutes ces égalités car il y a une quantité infinie de nombres. Pour écrire que l'égalité est valable pour tout nombre, on utilise une lettre pour noter ces nombres.

On écrira donc :

pour tous les nombres $a, b, c$ l'égalité suivante est vraie :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c. \tag{1.2}$$

Le cas particulier de l'égalité (1.1) ci-dessus correspond aux valeurs $a = 2, b = 5, c = 3$.

Il est d'usage lorsque l'on écrit des mathématiques de se référer à des équations écrites précédemment, cela est possible si on les indique par un numéro, ou par un nom par exemple celui de l'inventeur. Par exemple ici nous dirons que la propriété de distributivité est décrite par l'équation (1.2). De la même façon si on souhaite se référer à un résultat qui a été démontré on lui donne un nom ou un numéro, comme « le théorème de Pythagore », ou encore « le théorème 3.1 du chapitre 3 ».

**Puissances, théorème, lemme**

Le produit d'un nombre par lui-même s'appelle le *carré* de ce nombre. La terminologie vient du fait que cette quantité mesure la suface du carré dont le nombre est le côté. Par exemple le carré de 5 est $5 \times 5 = 25$. On note le carré d'un nombre avec un exposant 2 : le carré de 5 se notera $5^2$, et d'une manière générale le carré d'un nombre $a$ se notera :

$$a^2 = a \times a.$$

Lorsque l'on multiplie une quantité par elle-même 3 fois on obtient le cube de la quantité, noté avec un exposant 3 :

$$a^3 = a \times a \times a.$$

En continuant de la même manière, on obtient la puissance $n$-ième d'une quantité en la multipliant par elle-même $n$ fois, on la notera avec un exposant $n$ :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Nous avons vu que le produit de deux nombres positifs est positif, et qu'il en est de même du produit de deux nombres négatifs. On voit donc que, quel que soit le signe du nombre réel $a$, son carré est un nombre positif. Nous venons d'établir le résultat suivant :

La carré de tout nombre réel est un nombre positif.

Ceci est un résultat mathématique, issu d'un raisonnement. Le raisonnement qui a permis de l'établir est assez élémentaire : il nous a suffi de considérer les 2 cas possibles pour le signe du réel considéré. Cela n'ôte rien à la validité du résultat. Nous dirons qu'il s'agit d'un théorème parce que nous sommes fiers de notre premier résultat. En règle générale, un résultat mathématique provient d'une démonstration utilisant comme point de départ les propriétés des objets que l'on considère, et comme fil conducteur un raisonnement. On appelle ce résultat avec différents noms : un théorème, un lemme, une proposition, un corollaire. Tous ces mots ont la même signification et indiquent qu'une preuve a été fournie, les nuances indiquent une notion subjective d'importance du résultat. Le théorème est un résultat important en soi, le lemme est un résultat intermédiaire, la proposition un résultat notable mais ne méritant pas le nom de théorème, le corollaire est un résultat intéressant qui découle rapidement d'un résultat dont la démonstration est plus compliquée. Comme on le voit, la distinction entre ces termes ne provient pas de la science, mais de la façon dont les scientifiques perçoivent leurs résultats. Faisons preuve d'immodestie et énonçons le théorème suivant :

**Théorème 1** *Le carré de tout nombre réel est un nombre positif.*

**Manipulation d'égalités**

Une façon de démontrer des résultats ou de résoudre un problème est de transformer des égalités de façon à obtenir des égalités ayant la même signification mais plus faciles à traiter. Le précurseur a été le persan du IX$^{e}$ siècle Al-Kwarizmi – dont le nom a donné le mot *algorithme*. Il a développé dans son traité *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* les premières notions de calcul littéral, et désigné les quantités par des lettres. Son ouvrage ne comporte aucun nombre dans les équations, tous les calculs sont effectués avec des quantités désignées par des noms. C'est d'ailleurs lui qui est à l'origine du nom $x$ souvent donné à l'inconnue de nos jours : dans son ouvrage l'inconnue est appelée *shay*, ce qui signifie *la chose*. Ce terme a été orthographié *xay* par les mathématiciens andalous, et Descartes a gardé par commodité la première lettre $x$. Il n'y a donc aucune raison d'avoir peur de la lettre $x$ utilisée en mathématiques : il s'agit juste d'une « chose » !

En utilisant des notations modernes, les règles de calcul que l'on peut appliquer sont les suivantes :

➢ (A) On peut ajouter une même quantité aux deux termes d'une égalité, on obtient alors encore une égalité. Autrement dit, si deux quantités sont égales, et si je leur ajoute à chacune une même quantité alors j'obtiens encore deux quantités égales. Cette règle s'énonce de façon plus concise de la façon suivante :

Si $a = b$ alors pour toute valeur de $c$ on a $a + c = b + c$.

➢ (B) On peut simplifier dans une égalité lorsqu'un même terme est ajouté et retranché. Plus rapidement, pour toutes valeurs de $a$ et $b$ on a :

$$a + b - b = a.$$

L'utilisation combinée de ces deux règles de calcul est appelée *al-jabr* par Al-Kwarizmi ce qui signifie *réduction*. Ce terme a donné le mot *algèbre* dans notre langue.

➢ (C) Une autre règle de calcul est la suivante : on peut multiplier ou diviser les deux termes d'une égalité par un même nombre non nul, on obtiendra encore une égalité. Autrement dit

Si $a = b$ alors pour tout $c$ non nul on a $a \times c = b \times c$ et $a/c = b/c$.

L'ouvrage d'Al-Kwarizmi traite des équations du premier et du second degré. Nous nous limiterons ici à la résolution d'équations du premier degré en guise d'illustration des règles de calcul énoncées ci-dessus. L'utilisation de ces règles sur un exemple concret sera plus explicite.

**Exemple 1.**

Je suis sorti hier pour écouter un concert. L'entrée coûtait 15 euros, et chaque verre 3 euros. J'ai oublié combien de verres j'ai bu, mais j'ai dépensé en tout 27 euros. Est-il possible de retrouver le nombre de verres que j'ai bu ? Oui : cela va se faire en appliquant les règles de calcul algébrique ci-dessus. Notons $v$ la quantité de verres que j'ai bu. Pour boire ces verres j'ai dépensé la somme de $3 \times v$, c'est-à-dire le prix d'un verre multiplié par le nombre de verres consommés. J'ai également dépensé 15 euros pour mon entrée. La somme totale que j'ai dépensé dans ma soirée est donc $15+3\times v$. On peut donc écrire

$$15 + 3 \times v = 27. \tag{1.3}$$

Commençons par ajouter $-15$ aux deux termes de cette égalité, ce qui est possible grâce à la règle (A). On trouve

$$15 + 3 \times v - 15 = 27 - 15 = 12.$$

On simplifie le terme de gauche en utilisant la règle (B). C'est d'ailleurs en anticipant cette utilisation de la règle (B) que l'on a choisi d'ajouter $-15$ à la première étape. On a alors

$$3 \times v = 12.$$

Il reste en appliquant la règle (C) à diviser les deux termes par 3, ou ce qui revient au même à les multiplier par $1/3$, pour trouver finalement

$$v = 4.$$

J'ai donc bu 4 verres dans la soirée.

---

**Application pratique 1 : Peser avec une tare**

Je rentre du marché avec un cageot plein de pommes, le tout pesant 5 kg. Le cageot vide pèse 400 g, et chaque pomme pèse 200 g. Combien y a-t-il de pommes ?

Éléments de réponse

Notons $n$ le nombre de pommes. Si on raisonne en grammes, on peut écrire que

$$5000 = 400 + 200 \times n.$$

Retirons $400$ des deux côtés de cette égalité en appliquant les règles (A)-(B). On trouve

$$4600 = 200 \times n.$$

Il reste enfin à diviser par 200 pour trouver la valeur $n = 23$.

---

# 2

# Calculs élémentaires, multiplication, division

Dans notre société nous sommes abreuvés de chiffres, qu'ils soient donnés par les journalistes, par les personnalités politiques ou par d'autres sources d'information. Certains journaux mettent en évidence *Le chiffre du jour* ou *Le chiffre de la semaine.* Cette pratique est étonnante, car donner un seul chiffre présente rarement de l'intérêt, si on ne le compare pas à une autre quantité rapportée par exemple à la même mesure dans des conditions différentes (autre région, période antérieure, etc.) Est-ce pour attirer l'œil que l'on souhaite mettre un encadré ? Une information qui peut se résumer à un chiffre est censée être plus attrayante ? Est-ce pour des raisons de mise en page ?

Et cette avalanche de chiffres fait que l'on finit par ne plus y prêter attention. « Les chiffres ne veulent rien dire » : cette rengaine est un peu désolante pour le mathématicien parce que justement les nombres et les calculs sont des choses sur lesquelles il ne peut pas y avoir de tromperie : 2 et 2 ont toujours fait 4. Ce ne sont pas les chiffres qui ne veulent rien dire, c'est la manière dont on les combine ou la façon de les présenter qui peut induire en erreur.

Lorsque l'on voit un seul chiffre on ne peut que l'accepter comme une donnée établie en faisant confiance à la personne qui présente cette donnée. La manipulation volontaire ou involontaire peut être démasquée lorsqu'une source donne plusieurs chiffres, qui sont censés être reliés entre eux. Un petit calcul de vérification montre qu'il y a parfois des erreurs dans les chiffres donnés. Nous allons en voir des exemples dans ce chapitre.

### La base dix et le calcul de l'heure

Notre système de numération est un système décimal, c'est-à-dire qu'il repose sur la base dix. Le chiffre le plus à droite écrit est celui des unités, le suivant est celui des dizaines, c'est-à-dire qu'il faut multiplier ce chiffre par dix pour avoir la quantité qu'il représente, etc.

La base dix a un gros avantage : cela correspond à notre nombre de doigts, et nous pouvons facilement compter avec les doigts, du moins pour les petites quantités. Par contre lorsqu'il s'agit d'effectuer des divisions, les seules divisions qui « tombent pile » sont celles pour lesquelles le dénominateur est composé de puissances de 2 et de 5. Cela vient du fait que 2 et 5 sont les diviseurs de la base 10. Par contre, si on veut écrire 1/3 avec le système décimal on doit utiliser une infinité de chiffres :

$$\frac{1}{3} = 0,3333333...$$

les pointillés ci-dessus signifiant que l'on doit, pour avoir une réelle égalité, répéter indéfiniment le chiffre 3.

Si on veut choisir un système d'écriture des nombres où « le plus » de divisions possible tombent juste, on doit choisir une base qui a de nombreux diviseurs. Les Babyloniens avaient compris ce principe, et choisi un système numérique à base soixante. Les divisions par 2, 3, 4, 5, 6 tombent alors juste !

Nous avons hérité de ce système à base soixante pour ce qui est du calcul du temps. Une heure est divisée en 60 minutes, qui sont elles-mêmes divisées en 60 secondes.

Méfiez-vous, si vous avez travaillé 7 h et 30 min, vous n'avez pas travaillé 7,30 h mais plutôt 7,5 h. Votre patron doit bien vous payer 7,5 h. On en a vu soutenir mordicus que c'était 7,3 h...

### Un peu de vocabulaire

Lorsque l'on parle de *chiffre* du jour, chiffre du chômage, etc., on commet un abus de langage, qui est accepté car très répandu. Notre système de numération comporte 10 chiffres, ce sont les chiffres de 0 à 9. Pour désigner une quantité le mathématicien parle de *nombre*. Dans cet ouvrage nous allons nous conformer à l'usage et commettrons l'abus de langage habituel.

Une erreur rencontrée parfois provient d'une traduction erronée de l'anglais en ce qui concerne les grands nombres. Les puissances successives de 1000 sont désignées en français par : million, milliard, billion, billiard... On voit parfois des articles (il s'agit souvent de données économiques) qui parlent de *billion* alors qu'il s'agit de milliard. En effet en anglais on désigne par *billion* ce que le français appelle milliard, et certains traducteurs ignorent manifestement ce fait. C'est ainsi par exemple que nos milliar-