

Aref Jeribi

Résolution de divers problèmes elliptiques par des méthodes d'éléments finis

Cours, exercices, et problèmes corrigés



Table des matières

1	Les espaces de Hilbert	13
1.1	Norme	13
1.2	Produit scalaire	14
1.3	Propriétés élémentaires	15
1.3.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz	15
1.3.2	Inégalité triangulaire	15
1.3.3	Identité de parallélogramme	16
1.3.4	Identité de polarisation	16
1.3.5	Relation de Pythagore	16
1.3.6	Formule de Simpson	16
1.4	Orthogonalité	17
1.4.1	Définitions	17
1.4.2	Bases orthonormées	18
1.4.3	Projection orthogonale	19
1.5	Matrice	20
1.5.1	Matrice définie positive	20
1.5.2	Matrice orthogonale	21
1.5.3	Matrice monotone	21
1.6	Espace de Hilbert	21
1.6.1	Exemple	21
1.6.2	Ensembles et fonctions convexes	22
1.7	Projection sur un convexe fermé	22
1.8	Le dual d'un espace de Hilbert	31
1.8.1	Théorème de représentation de Riesz Fréchet	31
1.8.2	Exemple	33
1.9	Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram	34
1.9.1	Continuité et coercivité	34
1.9.2	Théorème de Stampacchia	34
1.9.3	Théorème de Lax-Milgram	39
1.10	Procédé de Gram-Schmidt	41
1.11	Base hilbertienne	42
1.11.1	Définition	42

1.11.2	Caractérisation d'une base hilbertienne	42
1.12	Exercices	45
1.13	Corrigés	52
2	Les espaces de Sobolev	85
2.1	Rappels sur les distributions	85
2.1.1	L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{R})$	85
2.1.2	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$	86
2.1.3	L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$	87
2.1.4	Distribution régulière	87
2.1.5	Dérivation au sens des distributions	90
2.2	Espace de Sobolev d'ordre 1, $H^1(\Omega)$	93
2.2.1	Définition	93
2.2.2	Espace de Hilbert séparable	94
2.2.3	Inégalité de Poincaré	96
2.2.4	Quelques propriétés de l'espace $H_0^1(\Omega)$	98
2.3	Théorème de trace	99
2.3.1	En dimension $n = 1$	99
2.3.2	En dimension $n \geq 2$	100
2.3.3	Application du théorème de trace	102
2.3.4	Formule de Green	102
2.4	Les espaces de Sobolev d'ordre m	103
2.4.1	Les espaces de Sobolev d'ordre m , $H^m(\Omega)$ $m \geq 1$	103
2.4.2	Espace de Hilbert séparable	104
2.4.3	Théorème de trace	105
2.4.4	Les espaces de Sobolev d'ordre m , $W^{m,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$	107
2.5	Exercices	108
2.6	Corrigés	110
3	Formulation variationnelle	113
3.1	Problème de Dirichlet	113
3.1.1	Formulation variationnelle	113
3.1.2	Équivalence entre formulation variationnelle et problème fort	114
3.1.3	Existence et unicité	116
3.2	Problème de Neumann	118
3.2.1	Formulation variationnelle	118
3.2.2	Existence et unicité	118
3.2.3	Équivalence entre formulation variationnelle et problème fort	119
3.3	Exercices	121
3.4	Corrigés	123

4	Introduction aux éléments finis	133
4.1	Méthode de Galerkin	133
4.2	Dimension 1 et introduction des éléments finis	136
4.2.1	Exemple 1	137
4.2.2	Exemple 2	137
4.2.3	Exemple 3	138
4.2.4	Exemple 4 (Cas général)	138
4.3	Majorations de l'erreur	142
4.3.1	On interpole par un polynôme de degré 1	142
4.3.2	On interpole par un polynôme de degré 2	149
4.3.3	On interpole par un polynôme de degré k	151
4.4	Exercices	151
4.5	Corrigés	153
5	Introduction des éléments finis en dimension 2	175
5.1	Triangulation du domaine	175
5.1.1	Valeurs aux sommets	176
5.1.2	Coordonnées barycentriques	177
5.2	Approximation de la solution	178
5.2.1	Espace d'approximation	178
5.2.2	Base de V_h	178
5.2.3	Solution approchée	179
5.2.4	Numérotation de la triangulation	180
5.2.5	Exemples de triangles de mauvaise qualité	182
5.3	Majorations de l'erreur	182
5.3.1	Triangle de référence \hat{T}	183
5.4	Monter en degré P_2	186
5.4.1	Unicité du polynôme pour un triangle à 6 nœuds	187
5.4.2	Coordonnées barycentrique	189
5.4.3	Erreurs avec le triangle à 6 nœuds	190
5.5	Domaine non polygonal	192
5.5.1	Domaine et domaine approché	192
5.5.2	Erreur entre solution exacte et solution approchée	199
5.5.3	Éléments à frontières courbes	202
5.6	Cas conforme : procédé de dualité d'Aubin Nitsche	205
5.7	Éléments rectangulaires	207
5.8	Exercices	209
5.9	Corrigés	213
6	Méthodes non conformes	223
6.1	Triangulation du domaine	223
6.1.1	Numérotation du domaine aux milieux des côtés	223
6.1.2	Valeurs aux milieux des côtés	224

6.2	Approximation de la solution	226
6.2.1	Espace d'approximation	226
6.2.2	Solution approchée	226
6.2.3	Existence et unicité de solution approchée	231
6.2.4	Majorations de l'erreur	233
6.3	Cas non conforme : procédé de dualité d'Aubin Nitsche	237
6.4	Brique de Wilson	247
6.4.1	Éléments rectangulaires	247
6.4.2	Problème approché, Patch test pour des mailles rectangulères	252
6.4.3	Majorations de l'erreur	254
6.5	Élément fini de la famille Serendipity	265
6.6	Problème de flexion de poutre encastree	273
6.6.1	Position du problème	273
6.6.2	Existence et unicité de solution	274
6.6.3	Problème approché	276
6.6.4	Majorations de l'erreur	278
6.6.5	Procédé de dualité d'Aubin Nitsche	280
6.6.6	Inégalité inverse	282
7	Méthodes nodales	285
7.1	Méthode nodale pour les carrés ou rectangles	285
7.1.1	Position du problème	285
7.1.2	Élément de référence	286
7.1.3	fonctions de base	287
7.1.4	Description de la méthode nodale	290
7.1.5	Relation entre méthode nodale et méthode non conforme	291
7.1.6	Existence et unicité de solution	296
7.1.7	Majorations de l'erreur pour la méthode non conforme	296
7.2	Méthode nodale sur les triangles	307
7.2.1	Éléments de base	307
7.2.2	Description de la méthode nodale sur les triangles	312
7.2.3	Coordonnées barycentriques	316
8	Systèmes du premier ordre symétriques positifs au sens de Friedrichs	323
8.1	Exemple	323
8.1.1	En dimension 1	324
8.1.2	En dimension 2	326
8.1.3	La pénalisation	327
8.2	Autre problème	330
8.3	Changement en système de premier ordre	332
8.3.1	Exemple en dimension 1	333
8.3.2	Exemple en dimension 2	333

8.3.3	Équation des ondes en dimension 1	334
8.4	Système de premier ordre	335
8.4.1	Formule de Green	336
8.4.2	Conditions aux limites	342
8.4.3	Exemples	345
8.5	Équation de la chaleur	370
8.6	Équation des ondes	374
8.7	Équation de transport	379
9	Approximation des systèmes de Friedrichs	
	par des méthodes d'éléments finis	383
9.1	Exemples	383
9.2	Majorations de l'erreur	391
9.3	Méthodes d'éléments finis continus	395
9.4	Méthode des éléments finis discontinus	401
9.4.1	Majorations de l'erreur	405
10	Problèmes de révision	409
10.1	Exercices et problèmes	409
10.2	Problèmes et examens	428
	Bibliographie	439
	Index	443