NOUVEAUX PROGRAMMES

Tle

1001 EXERCICES CORRIGÉS DE MATHÉMATIQUES COMPLÉMENTAIRES

Konrad Renard

POUR RÉUSSIR SON OPTION

ellipses

Chapitre 1

Calcul littéral

1.1 Partir d'un bon pied

1.1.1 Point de cours

Identités remarquables : soient a et b deux réels. On a alors :
• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Règles de calcul sur les puissances : soient n et p deux entiers relatifs, a et b deux réels non nuls. On a alors :
• $a^n a^p = a^{n+p}$ • $(a^n)^p = a^{np}$ • $(ab)^n = a^n b^n$ • $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ • $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$.

Règles de calcul sur les racines carrées : soient a et b deux nombres réels positifs. On a alors :
• $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ • si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
• si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

1.1.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 1 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = 2(3x+4) + 5(8x+6)$
2. $B = 3(5x-3) - 6(x-8)$
3. $C = 3x(2-5x) - 2x(4-2x)$
4. $D = 3x\left(x^2 + x + 3\right) - x\left(4x^2 - 3x + 2\right)$
5. $E = x^2\left(3x^3 - x + 5\right) + 3x\left(4 - 2x^2 - x^4\right)$
6. $F = x^2\left(2xy + y^2\right) - 2y\left(x^3 + xy\right)$

EXERCICE 2 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (2x+3)(5x+2)$
2. $B = (2x+3)(5x-2)$
3. $C = (2x-3)(5x-2)$
4. $D = (2-5x)(3x+4)$
5. $E = \left(3x^2 - 5x + 2\right)(5x+2)$
6. $F = (7x-9)\left(2 - 7x - 8x^2\right)$

EXERCICE 3 **5 minutes**

Développer et simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (x+1)^2$
2. $B = (x-2)^2$
3. $C = (3x+6)$
4. $D = (2x-8)^2$
5. $E = (2x+4)(2x-4)$
6. $F = (9+7x)(9-7x)$

EXERCICE 4 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = x^2 + 2x$
2. $B = 2a^3 + 3a^2$
3. $C = xy + 2x^2$
4. $D = 3x^2 - 8x$
5. $E = 2x(x+3) - 5(x+3)$
6. $F = (2x+3) + x(2x+3)$

EXERCICE 5 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes :

1. $A = (3x-2)(3x+4) + (x-1)(3x+4)$
2. $B = (x-2)(x+5) - (x-2)(2x+6)$
3. $C = (2x+1) + (2x+1)(3x-7)$
4. $D = (3-2x)(x+2) - (3-2x)$
5. $E = (x+1)(x-1) - (x-1)$
6. $F = (8x-1)(8x+1) - (8x+1)^2$

EXERCICE 6 **5 minutes**

Factoriser les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables :

1. $A = x^2 - 4x + 4$
2. $B = x^2 + 6x + 9$
3. $C = x^2 - 25$
4. $D = 16x^2 + 24x + 9$
5. $E = 9x^2 - 12x + 4$
6. $F = 64x^2 - 121$

EXERCICE 7 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes (SANS l'aide de la calculatrice) :

1. $A = \sqrt{27}$
2. $B = \sqrt{50}$
3. $C = \sqrt{75}$
4. $D = \sqrt{8}$
5. $E = \sqrt{72}$
6. $F = \sqrt{625}$

EXERCICE 8 **5 minutes**

Simplifier les expressions suivantes (SANS l'aide de la calculatrice) :

1. $A = \sqrt{8} - \sqrt{18}$
2. $B = \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{300}$
3. $C = \sqrt{75} + \sqrt{27} + \sqrt{48}$
4. $D = \sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$
5. $E = \sqrt{80} + \sqrt{45}$
6. $F = \sqrt{169} - \sqrt{144}$

EXERCICE 9 **5 minutes**

Donner le résultat des expressions suivantes sous la forme a^n :

1. $A = 7^9 \times 7^{-3} \times 7^{-8}$
2. $B = \left(4^{-5}\right)^8$
3. $C = \dfrac{5^3}{5^7}$
4. $D = 9^2 \times 9^{-3} \times 9^4 \times 9^{-5}$
5. $E = \left((-2)^4\right)^{-5}$
6. $F = \dfrac{(-9)^{-7}}{(-9)^{-12}}$

EXERCICE 10 **5 minutes**

Donner le résultat des expressions suivantes sous la forme a^n :

1. $A = 2^5 \times 2^7 \times 2^{-9}$
2. $B = \left(13^7\right)^3$
3. $C = \dfrac{(-2)^7}{(-2)^{-2}}$
4. $D = 5^4 \times 5^{-7} \times 5^{-8} \times 2^5$
5. $E = \left(2^9\right)^{-1}$
6. $F = \dfrac{13^7}{13^2}$

EXERCICE 11 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice, calculer les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{12^4}{4^4}$
2. $B = \dfrac{(-15)^{-3}}{5^{-3}}$
3. $C = 8^4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$
4. $D = \left(\dfrac{6}{14}\right)^{-5} \times \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5}$
5. $E = \dfrac{6^3 \times 15^3 \times 2^3}{12^3 \times 5^3}$
6. $F = \dfrac{10^4 \times 15^4 \times 2^{-4}}{3^4 \times 5^4 \times 6^{-4}}$

EXERCICE 12 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice, simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \dfrac{15^5}{5^5}$
2. $B = \dfrac{(-12)^{-4}}{2^{-8}}$
3. $C = 6^3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$
4. $D = \left(\dfrac{7}{9}\right)^{99} \times \left(\dfrac{18}{14}\right)^{99}$
5. $E = \dfrac{6^5 \times 10^5}{12^3 \times 5^3}$
6. $F = \dfrac{9^5 \times 15^5 \times 2^{-5} \times 5^{-5}}{2^{-6} \times 3^{10}}$

EXERCICE 13 **5 minutes**

SANS l'aide de la calculatrice écrire les expressions suivantes sous forme d'une fraction irréductible.

1. $A = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{15}$
2. $B = \dfrac{-2}{9} - \dfrac{-7}{15}$
3. $C = \dfrac{13}{30} - \dfrac{8}{15} + \dfrac{4}{3}$
4. $D = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}$
5. $E = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{3}{8} - \dfrac{9}{2} \div \dfrac{21}{4}$
6. $F = \left(\dfrac{7}{12} - \dfrac{2}{3}\right) \div \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{1}{2}\right)$

1.1.3 Exercices d'approfondissement

EXERCICE 14 **5 minutes**

1. Soient a un réel non nul et p un entier relatif.
   Simplifier l'expression $\dfrac{a^p}{a^p}$ de deux manières.
2. En déduire que quelque soit a réel non nul, $a^0 = 1$.

EXERCICE 15 **5 minutes**

En utilisant une identité remarquable, écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes :

1. $A = \dfrac{1}{3 - \sqrt{5}}$
2. $B = \dfrac{3}{\sqrt{7} + 2}$
3. $C = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$
4. $D = \dfrac{8 - \sqrt{2}}{8 + \sqrt{2}}$

EXERCICE 16 **5 minutes**

En utilisant une identité remarquable, écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes :

1. $A = \dfrac{2}{1 - \sqrt{2}}$
2. $B = \dfrac{5}{\sqrt{3} + 2}$
3. $C = \dfrac{3}{7 + 2\sqrt{3}}$
4. $D = \dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

EXERCICE 17 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x+3=0$ **2.** $8x-5=0$ **3.** $7-3x=0$ **4.** $43x-2021=0$

EXERCICE 18 **5 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(2x+3)(5x-2)=0$ **2.** $x(2x+8)=0$ **3.** $5x(18-2x)=0$ **4.** $x^2-5=0$

EXERCICE 19 **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x-3<0$ **2.** $5x+7\leqslant 0$ **3.** $4-5x\geqslant 0$ **4.** $18-7x<4$

EXERCICE 20 **10 minutes**

En établissant un tableau de signe, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(2x+3)(5x-2)>0$ **2.** $x(2x+8)\leqslant 0$ **3.** $5x(18-2x)<0$ **4.** $x^2-5\leqslant 0$

EXERCICE 21 **10 minutes**

1. Vérifier que pour tous réels a et b, on a : $a^2+2ab=(a+b)^2-b^2$ et $a^2-2ab=(a-b)^2-b^2$.
☞ On obtient ainsi la forme canonique d'un polynôme.

2. En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme du second degré.

a. $f(x)=x^2+x+1$ **c.** $f(x)=x^2-9x+9$ **e.** $f(x)=x^2-7x+10$

b. $f(x)=x^2+3x+4$ **d.** $f(x)=x^2-3x-3$ **f.** $f(x)=x^2+15x+30$

EXERCICE 22 **10 minutes**

Déterminer la forme canonique de chaque fonction polynôme.

1. $f(x)=2x^2+4x-3$ **3.** $f(x)=-2x^2-6x+3$ **5.** $f(x)=-4x^2-10x+2$

2. $f(x)=3x^2-x+9$ **4.** $f(x)=5x^2-8x-3$ **6.** $f(x)=-5x^2+12x+3$

EXERCICE 23 **10 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-3x^2-4x+5$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que : $f(x)=(x-1)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 24 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3+5x^2-2x-8$.

1. Développer, réduire et ordonner l'expression $(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

EXERCICE 25 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3+7x^2+x-2$.

Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x+2)\left(ax^2+bx+c\right)$.

Exercice 26 **15 minutes**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

1. Sans développer, déterminer les réels a et c tels que $f(x) = (x-2)\left(ax^2+bx+c\right)$.
2. En développant l'expression avec les valeurs de a et c obtenues, déterminer le réel b.
3. En déduire une factorisation complète de f.

Exercice 27 **15 minutes**

Soit P le polynôme définie par $P = x^3 - x^2 - 8x + 12$.

1. Vérifier que $P = x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12$.
2. En déduire une factorisation de P

Exercice 28 **15 minutes**

En utilisant l'astuce de l'exercice précédent, factoriser les polynômes suivants :

1. $P = x^3 + 2x^2 - 15x - 36$
☞ On pourra remarquer que $-15 = 9 - 24$.
2. $P = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$
☞ On pourra remarquer que $-7 = 1 - 8$.
3. $P = 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2$
☞ On pourra remarquer que $7 = 5 + 2$.

Exercice 29 **10 minutes**

Etablir la forme canonique du trinôme de forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Exercice 30 **10 minutes**

Des enfants se partagent un sachet de bonbons. Le premier enfant en prend un et le sixième de ce qui reste, le 2^{e} en prend 2 et le sixième de ce qui reste, le 3^{e} en prend 3 et le sixième de ce qui reste, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui lui prend tout ce qui reste.
Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de bonbons, sachant que tous les enfants ont eu le même nombre de bonbons ?

Exercice 31 **10 minutes**

Dans la classe il y avait exactement 40% de garçons. Six nouveaux garçons sont arrivés et il y a maintenant autant de garçons que de filles. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Exercice 32 **10 minutes**

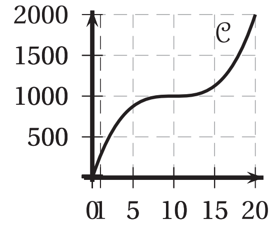
Déterminer deux entiers naturels consécutifs dont la différence des carrés est égale à 999.

Exercice 33 **10 minutes**

En augmentant de 9 cm la longueur de chaque côté d'un carré, son aire augmente de 135 cm^2. Quelle est l'aire du carré initial ?

EXERCICE 34 **20 minutes**

Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit.
Sa capacité maximale de production est de 20 tonnes. La courbe $\mathcal{C}$ ci-jointe représente le coût de production $C(x)$, exprimé en milliers d'euros, en fonction du nombre x de tonnes produites.



1. Après une étude de marché, l'entreprise espère vendre son produit 84 milliers d'euros la tonne.
   - **a.** Déterminer, en fonction du nombre x de tonnes produites, la recette $R(x)$ en milliers d'euros espérée par cette entreprise.
   - **b.** Tracer la représentation graphique Δ de la fonction R sur le graphique ci-dessous, pour $x \in [0\ ;\ 20]$.
     Déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir x pour assurer un bénéfice à l'entreprise.
   - **c.** Déterminer graphiquement, à une tonne près, le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximum.
2. On considère maintenant que $C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x \quad \text{avec } x > 0$.
   Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible sans perdre d'argent.
   Soit $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication.
   - **a.** Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x.
     Etablir le tableau de variations de $C_m(x)$ sur l'intervalle $[0; 20]$.
   - **b.** En déduire la valeur x_m qui assure un coût moyen minimum. Quel est alors le prix d'une tonne ?

1.2 Résolution de systèmes

1.2.1 Point de cours

On appelle système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y un système de la forme
$\begin{cases} ax + by = e & (E_1) \\ cx + dy = f & (E_2) \end{cases}$ où $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ sont des réels.

Définition : on appelle déterminant du système $\mathcal{S}$: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ le nombre

$$Det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Propriété : le système $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ admet un unique couple solution si et seulement si le déterminant du système est non nul.

☞ Si le déterminant du système est nul, soit le système n'a pas de couple solution, soit il en a une infinité.

Résoudre ce système, c'est déterminer tous les couples $(x;\ y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.

Résolution avec la méthode « par substitution »

1. A partir d'une équation (par exemple (E_1)), on exprime y en fonction de x.
2. Dans l'autre équation (ici (E_2)), on remplace y par l'expression trouvée précédemment. On obtient une équation du premier degré à une inconnue x.
3. On détermine x.
4. On détermine y en remplaçant, dans l'expression obtenue à l' étape **1**, x par la valeur obtenue en **3**.
5. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

☞ On travaille par implications successives, il est donc nécessaire (si on veut bien faire les choses) de vérifier que le couple obtenu est bien solution.

Résolution avec la méthode « par combinaisons »

1. On veut déterminer x, il faut donc éliminer y :
   - **a.** On multiplie tous les membres de l'équation (E_1) par d.
   - **b.** On multiplie tous les membres de l'équation (E_2) par $-b$.
   - **c.** On ajoute membre à membre les deux équations obtenues, on obtient une équation ne contenant que l'inconnue x.
   - **d.** On détermine alors x.
2. On détermine y :
   - **a.** soit on remplace la valeur de x obtenue dans (E_1) ou (E_2) ;
   - **b.** soit on reprend la méthode en éliminant x.
3. On vérifie que le couple $(x;\ y)$ obtenu est bien solution du système.

1.2.2 Exercices d'application de cours

EXERCICE 35 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x-7y=-9 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+3y=4 \\ 8x-4y=5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$

EXERCICE 36 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} -2x + 5y = 3 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$

EXERCICE 37 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par substitution :

1. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x = y \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 3x - 9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = -8 \end{cases}$

EXERCICE 38 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 7x + 4y = 6 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 5x + 8y = 2 \end{cases}$

EXERCICE 39 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 3x + 4y = 42 \\ 3x + 8y = 66 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 6x + y = 3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 6x + 7y = -4 \\ -3x + 2y = 5 \end{cases}$

EXERCICE 40 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode par combinaison :

1. $\begin{cases} 9a - 7b = 8 \\ -2a + 7b = 20 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4a - 3b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3a + 2b = -150 \\ 3a - 2b = -78 \end{cases}$

EXERCICE 41 **10 minutes**

Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de votre choix :

1. $\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 7x - 2y = 4 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3x = 2y \\ y = 6x - 9 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 9x + 7y = -12 \\ -9x + 4y = 30 \end{cases}$