Sujet 2021

Exercice 1 ....

1) Question préliminaire : on considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et de limite ℓ et on pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

a) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ' qui vérifie $\ell' \leq \ell$.

c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

d) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 1$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n{}^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$.

2) a) Pour tout entier naturel n, montrer que u_n est bien défini et que $u_n \geq 1$.

b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et donner sa limite.

c) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $S_n > 1000$.

```
n=1
u=1
S=1 // S1=u0=1
while S<=1000
  u=----
  S=----
  n=n+1
end
disp(----)
```

3) Recherche d'un équivalent de u_n.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\dfrac{1}{2}$.

b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{2}$.

4) a) Exprimer S_n en fonction de u_n puis en déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

b) Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question **2c)** sans calculer S_n :

```
n=0
u=1 // u0=1
while u<=----
  u=----
  n=n+1
end
disp(----)
```

Exercice 2

1) On considère une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Y=e^Z$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note F_Y la fonction de répartition de Y et Φ celle de Z.

a) Déterminer $F_Y(x)$ pour tout réel x négatif ou nul, puis exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction Φ pour tout réel x strictement positif.

b) En déduire qu'une densité f_Y de Y est donnée par :

$$f_Y(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite loi de Rademacher de paramètre p (avec $0<p<1$), définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X_n=1)=p \text{ et } P(X_n=-1)=1-p$$

On considère de plus, pour n dans $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $T_n=\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$.

2) a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables X_n.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T_n puis calculer $E(T_n)$ et en déduire une relation entre $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$.

c) Écrire une autre relation vérifiée par $P(T_n = 1)$ et $P(T_n = -1)$, puis en déduire la loi de T_n.

d) Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable T dont on précisera la loi.

3) Soit T' une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables X_n.

a) Établir l'inclusion suivante :

$$\left(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right) \subset (\,|T_{n+1} - T_n| < 1\,)$$

b) En déduire l'inégalité :

$$P(\,|T_{n+1} - T_n| \geq 1\,) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right)$$

c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable $T_{n+1} - T_n$, que : $P(\,|T_{n+1} - T_n| \geq 1\,) = 1 - p$.

d) La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ?

4) Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{2}$.

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \mathrm{e}^{n\overline{X}_n}$.

a) On rappelle que $\overline{X}_n^{\,*}$ est la variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$. Exprimer $\overline{X}_n^{\,*}$ en fonction de $\overline{X}_n$.

b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite $\left(U_n^{1/\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que Y.

Exercice 3 ....

On considère un espace euclidien E pour lequel le produit scalaire de deux vecteurs x et y est noté $\langle x, y\rangle$, tandis que la norme du vecteur x est notée $\|x\|$.

Le vecteur nul de E est noté 0_E.

On considère aussi un endomorphisme f de E, différent de l'endomorphisme nul, et antisymétrique, c'est-à-dire qu'il vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

1) Montrer que : $\forall x \in E, \ \langle f(x), x \rangle = 0$.

2) Établir l'égalité : $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$.

3) On pose $s = f \circ f$. Montrer que s est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont toutes dans $\mathbb{R}_-$.

4) On note g l'application qui à tout vecteur x de $\operatorname{Im}(f)$ associe $g(x) = f(x)$ et on pose $t = g \circ g$.

a) Montrer que g est un endomorphisme antisymétrique de $\operatorname{Im}(f)$.

b) En déduire que les valeurs propres de t sont toutes dans $\mathbb{R}_-^*$.

Dans les deux questions suivantes, on considère une valeur propre λ de t et on note $E_\lambda(t)$ le sous-espace propre associé à cette valeur propre.

5) On considère un vecteur e_1 non nul de $E_\lambda(t)$.

a) Montrer que $(e_1, g(e_1))$ est une famille d'éléments de $E_\lambda(t)$, orthogonale et libre.

b) En déduire, en considérant l'orthogonal F_2 de $\operatorname{Vect}(e_1, g(e_1))$ dans $E_\lambda(t)$, que la dimension de $E_\lambda(t)$ est paire et qu'il existe un entier naturel p non nul, ainsi que p vecteurs $e_1, e_2, ..., e_p$ de $E_\lambda(t)$, tels que $(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), ..., e_p, g(e_p))$ soit une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

6) Soit k un entier de $[\![1, p]\!]$.

a) Montrer que l'on a : $\| g(e_k) \|^2 = -\lambda \| e_k \|^2$.

b) On considère les vecteurs $e_k' = \dfrac{1}{\| e_k \|} e_k$ et $e_k'' = \dfrac{1}{\| g(e_k) \|} g(e_k)$.

Établir que $g(e_k') = \sqrt{-\lambda}\, e_k''$ et $g(e_k'') = -\sqrt{-\lambda}\, e_k'$.

7) a) Montrer que le rang de f est pair.

b) On pose $r = \frac{1}{2} rg(f)$. Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et r réels $a_1, \dots, a_r$ strictement positifs, pas forcément distincts, tels que la matrice M de f dans $\mathcal{B}$ soit :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & (0) & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & & \\ & & & & & a_r & 0 & & & \\ & & (0) & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & (0) & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}$$

Problème ....

Partie 1 : calcul d'intégrales utiles pour la suite

Pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, on pose : $I(p,q) = \int_0^1 x^p (1-x)^q \mathrm{d}x$. On a, en particulier $I(p,0) = \int_0^1 x^p \mathrm{d}x$ et $I(0,q) = \int_0^1 (1-x)^q \mathrm{d}x$.

1) Donner les valeurs de $I(p,0)$ et $I(0,q)$.

2) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout couple (p,q) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)$$

3) Pour tout q de $\mathbb{N}$, on considère la propriété H_q :

$$\text{« } \forall p \in \mathbb{N},\ I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q,0) \text{ »}$$

Montrer, par récurrence sur q, que H_q est vraie pour tout entier naturel q.

4) Donner explicitement, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels, l'expression de $I(p,q)$ en fonction de p et q, puis en déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $I(n,n)$ en fonction de n.

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$b_n(x)=\begin{cases}\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^n(1-x)^n & \text{si } 0\le x\le 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

5) Montrer que b_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet b_n comme densité.

6) Reconnaître la loi de X_0.

7) a) Utiliser la première partie pour montrer que X_n possède une espérance et que $E(X_n)=\dfrac{1}{2}$.

b) Toujours en utilisant la première partie, montrer que X_n possède une variance et exprimer $V(X_n)$ en fonction de n.

c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable certaine que l'on précisera.

Partie 3 : simulation informatique de X_n

On considère $2n+1$ variables aléatoires $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

On suppose que ces variables représentent respectivement les instants d'arrivée de $2n+1$ personnes $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ à leur lieu commun de rendez-vous. Pour tout k de $[\![1, 2n+1]\!]$, on note alors V_k l'instant d'arrivée de la personne arrivée la k-ième au rendez-vous (cette personne n'étant pas forcément A_k). On admet que V_k est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on note G_k sa fonction de répartition.

8) On note F_U la fonction de répartition commune aux variables $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$. Rappeler l'expression de $F_U(x)$ selon que $x<0$, $0\le x\le 1$ ou $x>1$.

9) a) Écrire la variable V_{2n+1} en fonction de $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$.

b) En déduire $G_{2n+1}(x)$ pour tout réel x.

10) a) Écrire la variable V_1 en fonction de $U_1, U_2, ..., U_{2n+1}$.

b) En déduire, pour tout réel x, la probabilité $P(V_1 > x)$ puis déterminer $G_1(x)$ pour tout réel x.

11) Écrire un script `Scilab` permettant de simuler V_1 et V_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

12) a) Montrer que l'on a :

$$\forall x \in [0,1],\ G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

b) Déterminer une densité g_{n+1} de V_{n+1} et en déduire que V_{n+1} suit la même loi que X_n.

c) On considère le script `Scilab` suivant :

```
U=[8,2,9,13,23,1,5]
V=median(U)
disp(V,'V=')
```

Quelle est la valeur renvoyée par ce script ?

d) Écrire un script `Scilab` permettant de simuler X_n.

Conseils 2021

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Pour majorer b_n, on peut majorer chaque terme de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ qui intervient dans la définition de b_n. Pour les variations de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on calcule $b_{n+1}-b_n$ (comme d'habitude !).

b) Que manque-t-il à une suite croissante pour être convergente ?

c) Il faut scinder la somme définissant b_{2n} en deux sommes, dont l'une s'exprime en fonction de b_n, puis utiliser la croissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour majorer l'autre.

d) On sait déjà que $\ell' \leq \ell$ donc il faut prouver qu'on a aussi $\ell' \geq \ell$.

2) a) Une récurrence s'impose.

b) • Il est intéressant de commencer en écrivant $u_n{}^2 + u_n \geq u_n{}^2$.

• Pour la divergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, raisonner par l'absurde (c'est souvent le cas pour montrer qu'une suite diverge) en supposant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine limite ℓ et en cherchant une "propriété absurde" vérifiée par ℓ.

c) Il faut coller aux définitions de u_n et S_n pour remplir les deux premières lignes.

3) a) Un bon début consiste à écrire $u_{n+1}{}^2 - u_n{}^2 = u_n$, puis à utiliser une identité remarquable pour enfin arriver (un peu plus tard) à $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n{}^2 + u_n} + u_n}$.

b) Ayant obtenu $f'(x) = \dfrac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$, le signe n'est pas évident mais tout s'éclaire en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de $2x+1-2\sqrt{x^2+x}$, à savoir $2x+1+2\sqrt{x^2+x}$.

c) On peut appliquer la question 1) en remplaçant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bien une suite croissante.