Sujet 2021

Exercice 1 ....

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

1) Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

2) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
b) Déterminer les points critiques de f.

3) a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.
b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4) Cet extremum est-il global ?

Partie 2

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x,1)$.

5) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x) = n$, d'inconnue x possède une unique solution que l'on notera u_n.

6) On note h la restriction de g à $[1, +\infty[$.
a) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.
b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
c) En déduire, en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha}$$

Exercice 2 ....

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1) a) Soit f la fonction qui à tout réel x associe :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x>0$ ou $x\leq 0$.

2) a) Montrer que la fonction, qui à tout réel x associe $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$, peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x\geq 1$ ou $x<1$.

3) On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b) On pose $Y_n=\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$F_n(x)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x\geq\dfrac{1}{\sqrt{n}}\\ 0 & \text{si } x<\dfrac{1}{\sqrt{n}}\end{cases}$$

4) Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) a) Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est supérieur strictement à la partie entière de $\dfrac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x)=\left(1-\dfrac{1}{nx^2}\right)^n$.

b) Rappeler l'équivalent classique de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

Exercice 3 ....

On considère un nombre réel a appartenant à $]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1) a) Donner les valeurs propres de M_a.

b) Déterminer les sous-espaces propres de M_a associés à ces valeurs propres.

c) En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2) On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a - I)(M_a - aI)^2$.

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que : $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I$.

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script `Scilab` qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur.

On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
a=input('entrez une valeur pour a :')
u=0
v=0
w=1
for k=1:n
   u=(2*a+1)*u+v
   v=-a*(a+2)*u+w
   w=a*a*u
end
disp(w,v,u)
```

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n = \frac{1 - a^n + (a-1)n\,a^{n-1}}{(a-1)^2}$$

5) On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right) I$.

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b) En déduire la limite L_a, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

6) On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a. Montrer que :

a) $\forall x \in \mathrm{Ker}(f_a - Id)$, $\varphi_a(x) = x$.

b) $\forall x \in \mathrm{Im}(f_a - Id)$, $\varphi_a(x) = 0$.

Problème ....

On dispose de deux pièces identiques donnant pile avec la probabilité p, élément de $]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$.

Partie 1 : un jeu naïf

Deux joueurs A et B s'affrontent lors de lancers de ces pièces de la façon suivante, les lancers de chaque pièce étant supposés indépendants :
Pour la première manche, A et B lancent chacun leur pièce simultanément jusqu'à ce qu'ils obtiennent pile, le gagnant du jeu étant celui qui a obtenu pile le premier. En cas d'égalité et en cas d'égalité seulement, les joueurs participent à une deuxième manche dans les mêmes conditions et avec la même règle, et ainsi de suite jusqu'à la victoire de l'un ou l'autre.
Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note X_k (resp. Y_k) la variable aléatoire égale au rang d'obtention du 1er pile par A (resp. par B) lors de la k-ième manche.
On note, toujours pour k dans $\mathbb{N}^*$, E_k l'événement : « Il y a égalité à la fin de la k-ième manche ».
On note E l'événement : « Il y a perpétuellement égalité ».

On note G (resp. H) l'événement : « A (resp. B) gagne à ce jeu », et pour tout entier naturel n non nul, on note G_n (resp. H_n) l'événement : « A (resp. B) gagne le jeu à la n-ième manche ».

1) Étude de la première manche.

a) Donner la loi commune à X_1 et Y_1. En déduire qu'il est quasi impossible que la première manche dure éternellement. On admet alors qu'il en est de même pour chaque manche jouée.

b) Écrire l'événement E_1 à l'aide des variables X_1 et Y_1.

c) Montrer que $P(E_1)=\sum_{i=1}^{+\infty} P(X_1=i)P(Y_1=i)$ et en déduire l'expression explicite de $P(E_1)$ en fonction de p et q.

d) Justifier sans aucun calcul que les événements G_1 et H_1 sont équiprobables. En déduire la probabilité de G_1 en fonction de p et q.

2) Calcul de la probabilité de l'événement G.

a) Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'événement G_n à l'aide des événements E_k et de l'événement $(X_n<Y_n)$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, donner la valeur de $P_{E_1\cap\ldots\cap E_{k-1}}(E_k)$ puis en déduire :

$$\forall n\geq 2\,,\ P(G_n)=\left(\frac{p}{1+q}\right)^{n-1}\frac{q}{1+q}$$

c) Vérifier que le résultat précédent reste valable pour $n=1$.

d) Exprimer G en fonction des G_n puis conclure, après calcul, que $P(G)=\frac{1}{2}$.

e) Expliquer comment obtenir la probabilité de l'événement H et en déduire que ce jeu a presque sûrement une fin, c'est-à-dire que $P(E)=0$.

Partie 2 : un autre jeu

En parallèle du jeu précédent, A parie sur le fait que la manche gagnée par le vainqueur le sera par un coup d'écart et B parie le contraire.

3) a) À l'aide du système complet d'événements $(X_1 = i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, montrer que $P(Y_1 = X_1 + 1) = \dfrac{pq}{1+q}$.

b) En déduire la probabilité u que l'un des deux joueurs gagne la première manche par un coup d'écart.

4) a) Utiliser les événements E_k pour écrire l'événement K_n « l'un des deux joueurs gagne la n-ième manche par un coup d'écart », ceci pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $P(K_n)$.

5) Donner finalement la probabilité de l'événement K : « A gagne ce pari ».

Partie 3 : informatique

On rappelle que la commande `grand(1,1,'geom',p)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

6) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il simule l'expérience décrite dans la partie 1 et affiche le nom du vainqueur du premier jeu ainsi que le numéro de la manche à laquelle il a gagné.

```
p=input('entrez une valeur pour p')
c=1
X=grand(1,1,'geom',p)
Y=grand(1,1,'geom',p)
while X==Y
X=------
Y=------
c=------
end
if X<Y then ------,else ------ end
disp(c)
```

7) Compléter la commande suivante afin qu'une fois ajoutée au script précédent elle permette de simuler le deuxième jeu et d'en donner le nom du vainqueur ?

```
if ------ then disp('A gagne le deuxième jeu')
else ------
end
```

Conseils 2021

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) Il faut absolument citer le mot "polynôme" ou l'expression "fonction polynomiale".

2) a) Il est difficile de se tromper mais mieux vaut être concentré.

b) La seule façon de faire est de résoudre le système $\begin{cases} \partial_1 f(x,y)=0 \\ \partial_2 f(x,y)=0 \end{cases}$, soit, après simplification : $\begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases}$.

3) a) Il faut dériver, par rapport à x et par rapport à y, les deux dérivées partielles d'ordre 1.

b) • La hessienne de f en (x,y) est : $H_{x,y}=\begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}f(x,y) & \partial^2_{1,2}f(x,y) \\ \partial^2_{2,1}f(x,y) & \partial^2_{2,2}f(x,y) \end{pmatrix}$.

• Il faut calculer le déterminant de $\nabla^2 f(x,y)-\lambda I$ en chaque point critique de f pour déterminer les valeurs propres des hessiennes dont le signe permet de trancher.

4) La forme de la question laisse entendre que la réponse est non…

5) C'est une situation typique d'utilisation du théorème de la bijection.

6) a) Il suffit de "renverser" le tableau de variation de h, c'est-à-dire échanger les intervalles de départ et d'arrivée, les variations de h^{-1} étant les mêmes que celles de h.

b) La clé est d'établir que $u_n=h^{-1}(n)$.

c) Il faut vérifier que $u_n^{\,3}-3u_n+1=n$, puis prouver que $u_n^{\,3}-3u_n+1 \underset{+\infty}{\sim} u_n^{\,3}$ (soit en faisant le quotient, soit par négligeabilité).

❖ Conseils de rédaction

1) Écrire que f est somme et produit de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas crédible car trop flou.

2) b) Faire attention de bien progresser par systèmes équivalents.

3) a) Si on veut économiser une des deux dérivées partielles $\partial_{1,2}^2 f(x,y)$ ou $\partial_{2,1}^2 f(x,y)$, il faut impérativement citer le théorème de Schwarz. Cela dit, l'économie est très minime, voire inexistante !

b) Il faut absolument écrire que les deux valeurs propres de $H_{1,1}$ sont *strictement* positives.

5) Ne pas oublier ni égratigner les deux conditions qui font que g réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur $[-1\,;+\infty[$. Il faut également signaler que n appartient à l'intervalle d'arrivée.

❖ Aide à la résolution

2) b) Pour résoudre $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$, procéder par substitution en écrivant $y = x^2$ puis en injectant dans $y^2 = x$ afin d'avoir une équation à une inconnue.

3) b) • Les valeurs propres de $H_{0,0}$ sont non nulles et de signe contraire donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

• Les valeurs propres de $H_{1,1}$ sont strictement positives donc f a un minimum local en $(1,1)$.

4) Pour assurer que le minimum trouvé n'est pas global, on peut trouver un couple de réels en lequel f prend une valeur inférieure à celle prise en ce minimum local.

5) C'est parce que n est un entier naturel supérieur ou égal à 4, que l'équation $g(x) = n$ n'a pas de solution sur $]-\infty\,; 1[$, puisque g a pour maximum 3 sur cet intervalle.

6) b) C'est grâce à $h(u_n) = n$ que l'on peut déduire $u_n = h^{-1}(n)$.

c) Ayant $n \underset{+\infty}{\sim} {u_n}^3$, on n'est pas du tout loin de l'arrivée.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) • Si l'on veut absolument décortiquer la fonction f, il ne faut pas citer la classe C^2 des fonctions $x \mapsto x^3$ et $y \mapsto y^3$, mais la classe C^2 des fonctions $(x,y) \mapsto x^3$ et $(x,y) \mapsto y^3$.

• La notion de dérivabilité n'existe pas pour les fonctions de deux variables.