

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 9 |
| Cadre et objectifs du voyage | 9 |
| Contexte scientifique : le monde diophantien | 10 |
| Énoncés du théorème, cas élémentaire non trivial | 13 |
| Histoire du problème | 17 |
| Quelques applications | 20 |
| Idée de la preuve, plan, dépendances | 22 |
| Remerciements | 29 |
| | |
| 1 Introduction aux corps de nombres | 31 |
| 1.1 Qu'est-ce qu'un nombre? | 34 |
| 1.2 Algébricité et transcendance | 37 |
| 1.3 Qu'est-ce qu'un entier? | 42 |
| 1.3.1 La notion d'entier algébrique | 42 |
| 1.3.2 Comportement des entiers dans les extensions | 49 |
| 1.4 Manipuler les nombres | 51 |
| 1.5 Incarner les nombres | 59 |
| | |
| 2 Géométrie des nombres | 73 |
| 2.1 Réseaux | 75 |
| 2.1.1 Qu'est-ce qu'un réseau? | 75 |
| 2.1.2 Théorème de Minkowski | 84 |
| 2.2 \mathcal{O}_K vu comme un réseau | 88 |
| 2.2.1 Le plongement canonique | 88 |
| 2.2.2 Finitude sur \mathcal{O}_K | 93 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Arithmétique des idéaux | 97 |
| 3.1 | Arithmétique dans un anneau commutatif intègre | 100 |
| 3.1.1 | Décomposition en éléments irréductibles | 101 |
| 3.1.2 | Décomposition en idéaux premiers | 114 |
| 3.2 | Arithmétique dans \mathcal{O}_K | 125 |
| 3.2.1 | Géométrie des idéaux | 125 |
| 3.2.2 | Finitude des classes | 133 |
| 3.2.3 | \mathcal{O}_K est de Dedekind | 145 |
| 3.2.4 | L'arithmétique classique retrouvée | 148 |
| 3.2.5 | Ramification et inertie | 161 |
| 4 | Le théorème des unités de Dirichlet | 183 |
| 4.1 | Structure des unités | 187 |
| 4.2 | Structure des S -unités | 200 |
| 5 | Corps valués | 203 |
| 5.1 | Places | 204 |
| 5.1.1 | Comment mesurer la complexité des nombres? | 205 |
| 5.1.2 | Géométries non archimédiennes | 210 |
| 5.1.3 | Places ultramétriques, valuations, idéaux premiers | 215 |
| 5.2 | Complétion | 220 |
| 5.2.1 | Quelques diagrammes | 221 |
| 5.2.2 | Places archimédiennes et plongements | 228 |
| 5.2.3 | Les nombres p -adiques | 232 |
| 5.3 | Les théorèmes d'Ostrowski | 245 |
| 5.3.1 | Classification des places sur \mathbb{Q} | 246 |
| 5.3.2 | Classification des places sur K | 246 |
| 5.3.3 | D'autres Ostrowski | 246 |
| 6 | Hauteurs de nombres | 249 |
| 6.1 | Le théorème de Northcott sur \mathbb{Q} | 250 |
| 6.2 | Mesure de la complexité des nombres | 252 |
| 6.2.1 | La formule du produit | 252 |
| 6.2.2 | Hauteur sur K | 255 |
| 6.2.3 | Manipuler les hauteurs | 255 |
| 6.2.4 | Hauteur absolue | 261 |
| 6.3 | Théorème de Northcott | 262 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 7 | Rappels préliminaires à la preuve | 265 |
| 7.1 | Des notions d'analyse complexe | 265 |
| 7.1.1 | Fonctions holomorphes | 266 |
| 7.1.2 | Théorème de Puiseux. | 274 |
| 7.2 | Produit tensoriel | 288 |
| 7.2.1 | Propriété universelle | 288 |
| 7.2.2 | Manipulation | 291 |
| 7.2.3 | Extension des scalaires | 298 |
| 7.2.4 | Extension des scalaires dans le cas d'un groupe abélien de type fini | 304 |
| 8 | Finitude et borne pour l'équation aux S-unités | 313 |
| 8.1 | Géométrisation hauteur-compatible des objets de type fini | 315 |
| 8.1.1 | Construction d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel | 315 |
| 8.1.2 | Une norme issue de la hauteur | 318 |
| 8.1.3 | Complétion en un \mathbb{R} -espace vectoriel | 321 |
| 8.2 | Analyse par la hauteur de la forme de l'équation | 325 |
| 8.2.1 | Inégalités numériques | 325 |
| 8.2.2 | Conséquences géométriques | 350 |
| 8.3 | Démonstration finale | 353 |
| 8.3.1 | Reformulation du problème | 353 |
| 8.3.2 | Recouvrir l'espace avec des boules | 354 |
| 8.3.3 | Un théorème général | 359 |
| 8.3.4 | Corollaire : borne du nombre de solutions de l'équation aux S -unités | 366 |
| 8.4 | Conclusion | 367 |
| 9 | Conclusion | 369 |
| | Références | 373 |
| | Index | 375 |