# Énoncé

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des exercices A ou B.

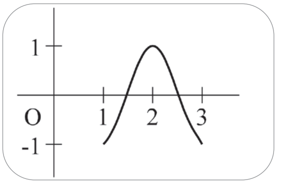
## Exercice 1 Vrai/Faux commun à tous les candidats

5 points

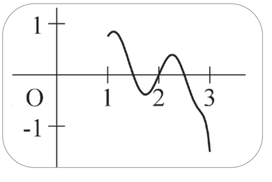
*Vous devez décider si chacune des cinq propositions suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre choix. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.*

### Proposition 1

Ci-dessous la représentation graphique dans un repère du plan d'une fonction $f$ définie et dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ :




Alors la fonction $g$ représentée ci-dessous est la fonction dérivée de $f$.




### Proposition 2

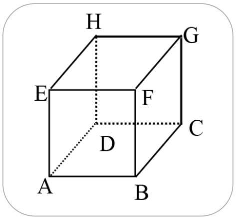
Pour tout nombre réel $x$, $2{,}7x - e^x$ est strictement négatif.

### Proposition 3

Il existe une fonction trinôme $T(x) = ax^2 + bx + c$ qui est solution de l'équation différentielle $y - y' = x^2 + x + 1$.

**Proposition 4**

Dans un cube quelconque ABCDEFGH, le produit scalaire $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH}$ est nul.




**Proposition 5**

Considérons les chiffres : 1, 2, 3, 4, et les lettres : A, B, C.

Alors il y a 210 manières d'écrire ces sept caractères à la suite de telle façon que les chiffres soient en ordre croissant (1AB2C34 est une de ces façons, 1A324BC n'en est pas une).

## Exercice 2 Commun à tous les candidats 6 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1 ; -1 ; 0)$, $B(6 ; -5 ; 1)$, $C(1 ; 2 ; -2)$ et $S(13 ; 37 ; 54)$.

**Question 1**

**a.** Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
On note $P$ l'unique plan passant par les points A, B, C : $P = (ABC)$.

**b.** Prouver que le vecteur $\vec{n}\,(5 ; 16 ; 29)$ est normal au plan $P$.

**c.** En déduire qu'une équation du plan $P$ est $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

**d.** Montrer que les points A, B, C, S ne sont pas coplanaires.

**Question 2**

**a.** Prouver que le triangle ABC est rectangle.

**b.** Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ unités d'aire.

**Question 3**

On considère la droite $\Delta$ passant par le point S et dont un vecteur directeur est $\vec{n}$.

**a.** Donner un système d'équations paramétrique de la droite $\Delta$.

**b.** La droite $\Delta$ coupe le plan $P = (\text{ABC})$ en un point H.
Déterminer les coordonnées du point H.

**c.** Justifier que le point H est le projeté orthogonal du point S sur le plan *P*.

**d.** Calculer le volume du tétraèdre SABC.

## Exercice 3 Commun à tous les candidats 4 points

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 10u_n + 21$ pour tout entier naturel *n*.

**1.** Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

**2.** Démonter, en raisonnant par récurrence, que $3u_n = 10^{n+1} - 7$ pour tout entier naturel *n*.
En déduire l'écriture décimale de l'entier $u_n$.

**3.** Justifier que l'entier $u_n$ n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5.

**4.** La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Croissante ? Majorée ? Minorée ? Chaque réponse devra être justifiée.

## Exercice Au choix du candidat 5 points

*Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.*
*Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.*
*Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués.*

### Exercice A

**Principaux domaines abordés**

- La fonction exponentielle
- Équations différentielles

### *Partie A. Des primitives*

**1.** Soient *a* et *b* deux constantes. Montrer que la fonction $U(x) = e^x(ax + b - a)$ est, sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $u(x) = e^x(ax + b)$.

**2.** En déduire toutes les primitives de la fonction $e^x(x+1)$.

### *Partie B. Résolution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = x + 1$*

L'objet de cette partie est de rechercher toutes les fonctions *y*, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $y'(x) + y(x) = x + 1$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $f$ est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $z(x) = e^x f(x)$ vérifie $z'(x) = e^x(x+1)$.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
Quelle est la solution particulière $g$ de (E) qui vérifie $g(0) = 0$ ?

### *Partie C. Étude d'une fonction*

On considère la fonction $h$ définie et dérivable sur $]-\infty\ ;+\infty[$, par :

$$h(x) = x + 2e^{-x}.$$

1. $h'$ étant la fonction dérivée de $h$, montrer que $h'(x) > 0$ si et seulement si $x > \ln(2)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction $h$.
3. L'équation $h(x) = 0$ admet-elle des solutions sur $\mathbb{R}$ ?

## Exercice B

**Principaux domaines abordés**

- La fonction logarithme
- Variation, signe d'une fonction

### *Partie A*

Soit $u$ la fonction définie, et dérivable, sur l'intervalle $\mathrm{I} = ]0\ ;+\infty[$ par :

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Déterminer les limites de $u$ en 0 et en $+\infty$. La courbe de $u$ tracée dans un repère du plan a-t-elle une asymptote ?
2. Montrer que la fonction $u$ est strictement croissante sur l'intervalle I.
3. Justifier que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur I.
Démontrer que $\alpha$ est entre 2 et 3, puis donner une valeur arrondie de $\alpha$ au centième près.
4. Étudier le signe de $u(x)$ en fonction de $x$.

### *Partie B*

Soit $f$ la fonction définie, et dérivable, sur l'intervalle $\mathrm{I} = ]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

1. Démontrer que, pour tout $x$ de I, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où $u$ est la fonction définie dans la **partie A**.
2. En déduire les variations de $f$ sur l'intervalle I.
3. Quel est le signe de $f(x)$ sur l'intervalle I ?

**4.** Démontrer que $f(\alpha)=4-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}$.

Attention, on ne peut pas utiliser une valeur approximative de $\alpha$ !

### *Partie C*

Dans un repère orthonormé du plan, on note *C* la représentation graphique de la fonction *f*, et *C'* la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

Les courbes *C* et *C'* ont-elles des points communs ? Si oui, combien, et quelles sont leurs coordonnées ? On étudie la propagation.

# Avant de commencer

## Aide

- Lisez (ne serait-ce qu'en diagonale) tout le texte pour commencer, afin de savoir de quelles parties du programme il est question dans chaque exercice.

  L'exercice 1 traite de chapitres variés : fonctions, équations différentielles, géométrie dans l'espace, dénombrement, l'exercice 2 traite de géométrie dans l'espace, l'exercice 3 de suites, l'exercice A d'équations différentielles et d'exponentielles, l'exercice B de logarithme.

- Commencez par un exercice obligatoire traitant d'une des parties du programme que vous connaissez bien ; vous prendrez confiance pour les autres exercices et vous maitriserez mieux le temps imparti. Quant au choix de l'exercice A ou B, vous verrez ça plus tard.

- Sachez que 5 points nécessitent théoriquement une heure de travail (ça fait du temps !), et 1 point 12 minutes de travail.

  Si vous commencez par l'exercice 1 et si après 15 minutes de réflexion vous ne voyez toujours pas comment aborder la première question, laissez tomber cette question ! Vous y reviendrez à la fin s'il vous reste du temps.

- Tout ce que vous écrirez sur votre copie est important, peut vous faire gagner des points même si vous n'arrivez pas à la réponse finale. Vos recherches vous apporteront des points, en tout cas ce que vous écrirez sans grosse bourde (une grosse bêtise serait, par exemple, de dire qu'une fonction croissante est de signe positif, ce qui n'est pas vrai).

- Rappeler une formule n'est pas du tout inutile, même si vous n'arrivez pas vraiment à l'exploiter. Il est important de montrer son savoir, de faire bonne impression.

  Par contre, si une formule vous échappe, ne cherchez pas à la réinventer en vous disant que « quelque chose c'est mieux que rien ». Non, rien c'est mieux que n'importe quoi.

- L'impression d'ensemble que donne votre copie, avec son sérieux, sa rigueur (pas de mauvaise réinvention de formules), sa présentation claire et lisible (résultats encadrés, pas trop de ratures,…) est importante. Même si les points sont attribués à chaque question, le correcteur sera plus ou moins compréhensif selon l'impression d'ensemble qu'il a de la copie.

- Quand on a résolu des questions, quand on n'a pas raconté de grosses bourdes, alors on a rendu une bonne copie.

- Pour finir, faire des exercices d'entraînement est plus utile si vous rédigez les solutions comme si vous étiez en examen ; faites l'effort de rédiger tout exercice d'entraînement que vous ferez dans l'année comme si vous aviez à rendre la copie à un correcteur, même si vous devez prendre davantage de temps. Prenez le temps ; « Vite fait, mal fait » : c'est vrai.

## Rappels de cours

| | | |
|---|---|---|
| **Fonctions** | Si $f(x)$ est positif pour $x$ entre $a$ et $b$, alors la courbe de $f$ est au-dessus de l'axe des abscisses entre les abscisses $a$ et $b$. | |
| | $(uv)'=u'v+uv'$ | La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$ |
| | $\begin{cases} f \text{ strictement monotone sur } [a\,;b] \\ f(a) \text{ et } f(b) \text{ de signes contraires} \end{cases}$ $\Rightarrow$ l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\,;b]$ | |
| | $F$ est une primitive de $f$ si $F'(x)=f(x)$ | |

| | | |
|---|---|---|
| **Exp et Ln** | $(e^x)'=e^x \quad (e^u)'=u'e^u \quad (\ln x)'=\frac{1}{x}$ | |
| | $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ |
| | $a>b>0 \Leftrightarrow \ln(a)>\ln(b)$ | |
| | $\ln(e^x)=x$ | $e^a=b>0 \Leftrightarrow a=\ln(b)$ |

| | | |
|---|---|---|
| **Espace** | A, B, C pas alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pas colinéaires | |
| | $\overrightarrow{AB}\ (x_B-x_A\ ;y_B-y_A\ ;z_B-z_A)$ | $AB=\sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2+(y_{\overrightarrow{AB}})^2+(z_{\overrightarrow{AB}})^2}$ |
| | $\vec{u}\cdot\vec{v}=x_{\vec{u}}x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}+z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}$ | |
| | ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ | |
| | $\vec{n}\ (a\,;b\,;c)$ vecteur normal au plan $P=(ABC)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$. | |
| | Un plan $P: ax+by+cz+d=0$ où $\vec{n}\ (a\,;b\,;c)$ vecteur normal à $P$ | |
| | Une droite $D$ : $\begin{cases}x=x_A+tx_{\vec{u}}\\ y=y_A+ty_{\vec{u}}\\ z=z_A+tz_{\vec{u}}\end{cases}$ où $(A, \vec{u})$ est un repère de $D$ | |

# Corrigé

## Exercice 1

### Proposition 1

Les variations de la fonction *f*, visibles sur le graphique, indiquent le signe de sa fonction dérivée $f'$.

| $x$ | 1 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Variation de $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |

La fonction dérivée $f'$ est positive sur l'intervalle $[1\,;2]$, donc la courbe de $f'$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[1\,;2]$.

Mais la courbe de *g* n'est pas au-dessus de l'axe des abscisses sur $[1\,;2]$, donc *g* n'est pas $f'$.

La proposition 1 est fausse.

### Proposition 2

La dérivée de $e^x$ est $e^x$, donc la dérivée de $2{,}7x - e^x$ est $2{,}7 - e^x$.

Étudions le signe de cette dérivée : $2{,}7 - e^x > 0 \Leftrightarrow 2{,}7 > e^x$.

Mais le logarithme étant une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $a > b \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$ pour *a* et *b* strictement positifs.

Donc $2{,}7 > e^x \Leftrightarrow \ln(2{,}7) > \ln(e^x) \Leftrightarrow \ln(2{,}7) > x$ puisque $\ln(e^x) = x$.

Finalement, cette dérivée est strictement positive sur $]-\infty\,;\ln(2{,}7)[$, négative ailleurs.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(2{,}7)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2{,}7 - e^x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2{,}7x - e^x$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Le maximum de la fonction $2{,}7x - e^x$ est $2{,}7\ln(2{,}7) - e^{\ln(2{,}7)} \approx -0{,}018...$

Donc, pour tout *x*, $2{,}7x - e^x \leq -0{,}018... \Rightarrow 2{,}7x - e^x < 0$.