

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Groupes, sous-groupes</b>	<b>1</b>
1.1	Groupes . . . . .	1
1.2	Sous-groupes . . . . .	4
1.3	Groupes diédraux . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Morphismes et isomorphismes</b>	<b>15</b>
2.1	Morphismes de groupes . . . . .	15
2.2	Automorphismes . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Théorème de Lagrange</b>	<b>23</b>
<b>4</b>	<b>Groupe opérant sur un ensemble</b>	<b>29</b>
4.1	Opération de groupe . . . . .	29
4.2	Opération d'un groupe par translation . . . . .	34
4.3	Opération d'un groupe par conjugaison . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Groupes quotients</b>	<b>43</b>
5.1	Définitions . . . . .	43
5.2	Corps finis et groupe linéaires finis . . . . .	48
5.3	Sous-groupe dérivé . . . . .	50
5.4	Théorèmes d'isomorphisme . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Groupes symétriques</b>	<b>55</b>
6.1	Permutations et cycles . . . . .	55
6.2	Classes de conjugaisons . . . . .	60
6.3	Groupes alternés . . . . .	62
<b>7</b>	<b>Formule des classes et <math>p</math>-groupes</b>	<b>71</b>
<b>8</b>	<b>Produit semi-direct</b>	<b>77</b>
8.1	Produit direct et semi-direct . . . . .	77
8.2	Extension de groupe . . . . .	81

8.3	Correspondance des sous-groupes . . . . .	84
<b>9</b>	<b>Théorème de Sylow</b>	<b>87</b>
<b>10</b>	<b>Groupes d'ordre 12 (18, 20 et 21)</b>	<b>95</b>
<b>11</b>	<b>Groupes résolubles</b>	<b>99</b>
<b>12</b>	<b>Groupes abéliens de type fini</b>	<b>105</b>
12.1	Groupes abéliens libres, sous-groupe de torsion . . . . .	105
12.2	Théorème de structure . . . . .	109
12.3	Calcul des invariants . . . . .	113
<b>13</b>	<b>Groupes linéaires</b>	<b>119</b>
13.1	Générateurs du groupe linéaire . . . . .	119
13.2	Groupe dérivé . . . . .	122
13.3	Groupes linéaires finis . . . . .	124
<b>14</b>	<b>Groupes projectifs</b>	<b>127</b>
14.1	Théorème d'Iwasawa . . . . .	127
14.2	Espace projectif . . . . .	129
14.3	Simplicité du groupe $\text{PSL}(V)$ . . . . .	132
<b>15</b>	<b>Sous-groupes finis de <math>\text{SO}(2, \mathbb{R})</math> et de <math>\text{SO}(3, \mathbb{R})</math></b>	<b>135</b>
<b>16</b>	<b>Représentations linéaires</b>	<b>143</b>
16.1	$G$ -modules . . . . .	144
16.2	Caractères des groupes finis . . . . .	150
16.3	Caractères et sous-groupes distingués . . . . .	158
<b>Annexe A</b>	<b>Groupes libres</b>	<b>161</b>
<b>Annexe B</b>	<b>Cryptographie avec les courbes elliptiques</b>	<b>163</b>
<b>Annexe C</b>	<b>Indications pour certains exercices</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>181</b>
	<b>Index</b>	<b>183</b>