Chapitre 1

Des entiers naturels aux nombres rationnels

1 Ensembles de nombres

Les entiers naturels sont les nombres « de notre enfance ». Ceux que l'on découvre lorsqu'on apprend à compter : $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, sans oublier le 0.

1.1 Entiers naturels

1.1.1 Introduction

Définition I-1 (entiers naturels)

L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble de tous les entiers positifs y compris zéro. On le note $\mathbb{N}$. On a donc

$$\mathbb{N} = \{\mathbf{0, 1, 2, 3 \ldots}\}.$$

L'ensemble des **entiers naturels strictement positifs** est noté :

$$\mathbb{N}^* = \{\mathbf{1, 2, , 3 \ldots}\}.$$

Le nom de naturel vient de l'italien *naturale* attribué au mathématicien Giuseppe Peano. Ce dernier a défini l'ensemble des entiers naturels de manière précise :

- 0 est un entier naturel ;
- tout successeur (on ajoute 1) d'un entier naturel est un entier naturel ;
- deux entiers naturels qui ont le même successeur sont égaux ;
- toute partie des entiers naturels qui contient 0 et telle que le successeur de tout élément de cette partie est encore dans cette partie, est exactement l'ensemble des entiers naturels.

Remarques.

La définition de Peano entraîne que l'ensemble des entiers naturels est infini.

L'ensemble des entiers naturels strictement positifs peut s'écrire de plusieurs manières :

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^* &= \{1, 2, 3 \dots\} && \\ &= \{n \in \mathbb{N}, n > 0\} && : \textit{ les éléments de } \mathbb{N} \textit{ qui sont strictement positifs} \\ &= \mathbb{N} \setminus \{0\} && : \mathbb{N} \textit{ privé de } 0. \end{aligned}$$

Ma boîte à outils

Un élément e appartient à l'ensemble E se note en mathématiques : $\boldsymbol{e \in E}$.

Parmi les entiers naturels, il y en a que l'on distingue plus facilement que d'autres : les pairs, c'est-à-dire tous les entiers qui sont multiples de 2 (on dit aussi tous les entiers divisibles par 2) ; et ceux qui ne sont pas pairs, c'est-à-dire les impairs, qui sont tous les entiers naturels qui ne sont pas multiples de 2.

Définition I-2 (entiers pairs et impairs)

L'ensemble des **entiers pairs** s'écrit $\boldsymbol{\{2k,\ k \in \mathbb{N}\}}$.

L'ensemble des **entiers naturels impairs** s'écrit $\boldsymbol{\{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}}$.

1.1.2 Opérations dans l'ensemble des entiers naturels

La première opération définie sur cet ensemble est **l'addition** : on peut la définir comme l'opération qui lorsqu'on ajoute 1 à un entier fait passer à l'entier suivant. En ajoutant à cela la propriété qu'ajouter 0 à un entier ne change pas cet entier, on définit l'addition entre deux entiers par : si m et n sont deux entiers naturels on a

$$m + n = m \quad \text{si } n \text{ est égal à } 0 \quad \text{et} \quad m + n = m + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \quad \text{si } n \neq 0.$$

La deuxième opération définie sur cet ensemble est **la multiplication** : on peut la définir comme l'opération qui lorsqu'on multiplie deux entiers m et n consiste à ajouter n fois l'entier m. En ajoutant à cela la propriété que si on multiplie par 0 on obtient 0. Ainsi on a

$$m \times n = 0 \text{ si } n = 0 \quad \text{et} \quad m \times n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n \text{ fois}} \text{ si } n \neq 0$$

Remarques.

Ces deux opérations sont apprises dès le plus jeune âge sous forme de tables. Ce sont les gammes du calcul mental. Cet apprentissage précoce permet d'ancrer des propriétés telles que

— **l'associativité** *: lorsqu'une même opération se répète on peut faire des calculs intermédiaires par paquets.*
Si on considère trois entiers naturels m*,* n *et* p *alors :*
$m+n+p=(m+n)+p=m+(n+p)$ *et* $m\times n\times p=(m\times n)\times p=m\times(n\times p)$*.*

— **la commutativité** *: il n'y a pas d'ordre dans la manière d'effectuer ces opérations.*
Si on considère deux entiers naturels m *et* n *alors* $m+n=n+m$ *et* $m\times n=n\times m$*.*

Un autre point important pour ces deux opérations est que ce sont des **lois de composition interne***. C'est-à-dire que lorsqu'on ajoute ou qu'on multiplie deux entiers naturels on obtient encore un entier naturel. Ce qui explique qu'elles apparaissent en premier lorsqu'on définit l'ensemble des entiers naturels.*

1.1.3 Division entre entiers

Nous allons dans ce paragraphe aborder une opération qui est peut-être moins immédiate, en tous les cas pas d'usage quotidien.

Définition I-3 (diviseur - multiple)

Soit m un entier naturel et n un entier naturel non nul. On dit que n est un **diviseur** de m (ou encore que n **divise** m), s'il existe un entier naturel p tel que $\boldsymbol{m=n\times p}$. Cela équivaut à m est un **multiple** de n.

Remarque.

On peut remarquer qu'avec les notations de la définition précédente, si n *divise* m *avec* $m=n\times p$*, alors si* p *est différent de zéro,* p *divise aussi* m*.*

Exemple 1.1. Si l'on considère l'entier naturel 6, l'ensemble de ses diviseurs est : $1,\ 2,\ 3$ et 6.

Définition I-4 (nombre premier)

Soit m un entier naturel supérieur où égal à 2. On dit que m est **premier** ou est un **nombre premier** si les seuls diviseurs de m sont 1 et m.

Exemple 1.2. Les premiers nombres premiers sont : $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ ....$

Remarques.

Il y a une infinité de nombres premiers.

En dehors de 2*, tous les nombres premiers sont impairs. Mais tout nombre impair n'est pas premier : par exemple* 15 *est impair mais n'est pas premier car ses diviseurs sont* $1,\ 3,\ 5$ *et* 15*.*

Pour savoir si un entier naturel est premier il suffit de vérifier si les entiers naturels inférieurs à lui le divisent ou non (on peut aussi ne regarder que les nombres premiers).

Ma boîte à outils

✍ Les nombres premiers sont très importants, en particulier car ils permettent d'obtenir l'ensemble des entiers naturels : ils forment l'alphabet des entiers naturels. Par exemple si on considère l'entier $n = 321$. On a

$$324 = 2\times162 = 2\times2\times81 = 2\times2\times3\times27\times = 2\times2\times3\times3\times9 = 2\times2\times3\times3\times3\times3$$

que l'on notera encore $324 = 2^2\,3^4$. On dit que l'on a effectué **la décomposition** de 324 **en produits de facteurs premiers**.

Définition I-5 (pgcd - ppcm)

Soient m et n deux entier naturels non nuls. On appelle **plus grand commun diviseur** le plus grand entier naturel qui divise à la fois m et n. On le notera **pgcd($\boldsymbol{m,n}$)**. On appelle **plus petit commun multiple** le plus petit entier naturel qui est divisible à la fois par m et n. On le notera **ppcm($\boldsymbol{m,n}$)**.

Remarques.

On peut remarquer qu'avec les notations de la définition précédente, pgcd(m,n) est un diviseur commun de m et n et ppcm(m,n) est un multiple commun de m et n. De plus on a pgcd(m,n) = pgcd(n,m) et ppcm(m,n) = ppcm(n,m).

On étend ces définitions de la manière suivante :

— *si m est un entier naturel non nul alors* $\mathrm{pgcd}(\mathrm{m},0) = \mathrm{m}$ *et* $\mathrm{ppcm}(\mathrm{m},0) = 0$*;*

— $\mathrm{pgcd}(0,0) = 0$ *et* $\mathrm{ppcm}(0,0) = 0$.

Définition I-6 (entiers premiers entre eux)

Soient m et n deux entier naturels non nuls. On dit que m et n sont **premiers entre eux** si le seul diviseur commun de m et n est 1, autrement dit si **pgcd($\boldsymbol{m,n}$) = 1**.

Remarque.

Attention cela ne signifie pas que m et n sont premiers : par exemple **pgcd**$(16,21) = 1$, *mais ni* 16 *ni* 21 *sont premiers. Par contre si m et n sont deux entiers naturels premiers distincts alors ils sont premiers entre eux.*

Supposons maintenant que l'on veuille partager un paquet de m bonbons entre n enfants. La méthode naturelle pour le faire est de donner à chaque enfant un premier bonbon, puis à chacun un deuxième, etc. Et ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus assez de bonbons. On peut donc écrire $m = n\times q + r$, où q est l'entier naturel égal au nombre de bonbons reçus par chaque enfant et r le reste de bonbons.

Le reste peut être égal à 0 si m est un multiple de n. Il ne peut pas être supérieur à $n-1$, car sinon on pourrait redonner un bonbon à chaque enfant.

Proposition I-1 (division euclidienne)

Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Il existe deux entiers naturels uniques $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$ tels que :

$$\boldsymbol{m = nq + r} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{0 \leq r \leq n - 1}.$$

On dit que l'on a effectué la **division euclidienne** de m par n.

1.2 Entiers relatifs

Si on possède 10 objets et qu'on en donne 4, il ne nous en restera plus que 6. L'opération qui consiste à enlever les 4 objets correspond à une soustraction $10 - 4 = 6$. Mais il peut arriver que l'on veuille acheter une voiture à 20000€ et que l'on ne dispose que de 15000€. On peut emprunter 5000€. L'opération que l'on effectue peut alors s'exprimer ainsi $15000 - 20000 = -5000$€, le signe moins expliquant ici que l'on a emprunté les 5000€.

Naturellement, ce signe moins apparaît aussi lorsqu'on s'intéresse à des températures par exemple, où lorsqu'on prend l'ascenseur pour aller dans un parking en sous-sol.

1.2.1 Introduction

Définition I-7 (entiers relatifs)

L'ensemble des **entiers relatifs** est l'ensemble de tous les entiers positifs et négatifs y compris zéro. On le note $\mathbb{Z}$. On a donc

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

L'ensemble des **entiers relatifs non nuls** est noté :

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Remarques.

La lettre $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand Zahlen qui signifie nombre ou chiffre.

L'ensemble des entiers relatifs positifs est égal à l'ensemble des entiers naturels. On a

$$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\} \quad \textit{et} \quad \mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}.$$

Ce sont des sous-ensembles de l'ensemble des entiers relatifs et leur réunion est égale à cet ensemble.

On peut remarquer que 0 est à la fois dans les deux ensembles.

Définition I-8 (opposé)

Soit m un entier relatif, l'entier relatif $\boldsymbol{-m}$ est appelé **l'opposé** de $\boldsymbol{m}$.

Remarque.

On peut remarquer que l'opposé de 0 *est* 0*. On a de plus, pour tout entier relatif* m

$$m + (-m) = 0$$

1.2.2 Opérations dans l'ensemble des entiers relatifs

On peut étendre la définition de **l'addition** et de **la multiplication** à l'ensemble des entiers relatifs de la manière suivante. Soient m et n deux entiers positifs. Alors on a :

— $m + n$ et $m \times n$ sont définis comme dans $\mathbb{N}$;

— $m + (-n) = (-n) + m = m - n$ qui est égal au décalage ou la distance entre m et n (combien de fois faut-il décaler de 1 pour aller de m à n), avec un signe positif si m est supérieur à n et avec un signe négatif si m est inférieur à n.

— $m \times (-n) = (-n) \times m = -(m \times n)$;

— $(-m) + (-n) = -(m + n)$ et $(-m) \times (-n) = m \times n$

On peut alors définir **la soustraction** sur les entiers relatifs : si m et n sont deux entiers relatifs alors $m - n = m + (-n)$.

Remarques.

Ces opérations sont des lois de composition interne sur $\mathbb{Z}$*.*

Elles sont associatives. L'addition et la multiplication sont commutatives dans $\mathbb{Z}$*. Mais la soustraction ne l'est pas :* $3 - 2 = 1$ *n'est pas égal à* $2 - 3 = -1$*.*

1.2.3 Diviseurs et multiples

Ces notions se généralisent à l'ensemble des entiers relatifs.

Définition I-9 (diviseur - multiple)

Soit m un entier relatif et n un entier relatif non nul. On dit que n est un **diviseur** de m (ou encore que n **divise** m) s'il existe un entier relatif p tel que $\boldsymbol{m = n \times p}$. Cela équivaut à m est un **multiple** de n.

On peut alors étendre la notion de pgcd et de ppcm.

Proposition I-2 (pgcd - ppcm)

Soient m et n deux entier naturels non nuls. On a

$$\mathrm{pgcd}(-m,-n) = \mathrm{pgcd}(m,-n) = \mathrm{pgcd}(-m,n) = \mathrm{pgcd}(m,n)$$
$$\mathrm{ppcm}(-m,-n) = \mathrm{ppcm}(m,-n) = \mathrm{ppcm}(-m,n) = \mathrm{ppcm}(m,n)$$

Remarque.

On remarque que le pgcd et le ppcm sont toujours deux entiers naturels.

Ma boîte à outils

✍ L'opération qui consiste à renvoyer un nombre si ce nombre est positif, et son opposé s'il est négatif s'appelle **valeur absolue** et se note $|.|$. On a donc, pour m et n, deux entiers relatifs,

$$\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \mathbf{pgcd}(|\boldsymbol{m}|,|\boldsymbol{n}|) \quad \textbf{et} \quad \mathbf{ppcm}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = \mathbf{ppcm}(|\boldsymbol{m}|,|\boldsymbol{n}|)$$

Il est également possible de démontrer que

$$\mathbf{pgcd}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\mathbf{ppcm}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}) = |\boldsymbol{mn}|.$$

1.3 Nombres rationnels

Supposons que l'on possède 15 objets identiques que l'on veuille distribuer de manière égale entre trois personnes. Ce que chacun recevra est déterminé par **la fraction** $\frac{15}{3} = 5$. Si l'on voulait maintenant partager ces objets entre deux personnes on obtiendrait $\frac{15}{2} = 7.5$. Enfin, si l'on souhaite partager une pizza entre 6 personnes, chacun recevrait une part représentant $\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$ Ici il n'est pas possible d'écrire de manière précise la fraction, même sous la forme d'un **nombre décimal**.

1.3.1 Introduction

Définition I-10 (nombres rationnels)

Soit p un entier relatif et q un entier relatif non nul. L'ensemble des **nombres rationnels** est l'ensemble de tous les nombres qui s'écrivent $\frac{p}{q}$. On note cet ensemble $\mathbb{Q}$. On a donc $\mathbb{Q} = \left\{\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{Z},\ \boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Dans cette fraction, p est appelé le **numérateur** et q le **dénominateur** de la fraction.

L'ensemble des **nombres rationnels non nuls** est noté : $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Remarques.

L'ensemble des nombres rationnels a été défini par Peano. La notation vient de l'italien quotiente (quotient), la fraction. Le terme rationnel vient du mot ration qui a le sens de fraction ou partie.

L'ensemble des entiers relatifs est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$*. Pour le voir, il suffit de prendre* $q = 1$ *dans la fraction* $\frac{p}{q}$.

Remarquons que si l'on veut partager $2p$ *bonbons entre* $2q$ *enfants, ce qui reviendra à chacun est égal à ce que l'on obtient lorsqu'on divise* p *bonbons entre* q *enfants ; autrement dit :*

$$\frac{2p}{2q} = \frac{p}{q}$$

Nous précisons cela dans la suite. Enfin il est important de remarquer que si p *et* q *sont deux entiers relatifs non nuls :*

$$\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}$$

Définition I-11 (fraction irréductible)

Soit p un entier relatif et q un entier relatif non nul. On dit que la fraction $\frac{p}{q}$ est **irréductible** lorsque p et q n'ont pas de diviseur commun autre que 1, autrement dit $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$, c'est-à-dire p et q sont premiers entre eux.

Remarques.

Tout nombre rationnel peut s'écrire comme une fraction irréductible. Lorsqu'on fait des calculs dans les nombres rationnels, on simplifiera toujours les nombres obtenus à la fin sous forme de fractions irréductibles. Pour rendre irréductible une fraction, on simplifie le numérateur et le dénominateur par leur(s) diviseur(s) commun(s). Pour cela, on peut utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur ou chercher le pgcd du numérateur et du dénominateur.

Un nombre rationnel peut soit être entier $\frac{4}{2} = 2$*, soit s'écrire sous la forme d'un nombre avec une virgule et un nombre fini de chiffres après la virgule* $\frac{4}{32} = 0,125$*, ou enfin comme un nombre avec une virgule ayant un nombre infini de chiffres après la virgule mais avec une écriture périodique, au moins à partir d'un certain rang* $\frac{25}{7} = 3,\mathbf{571428}571428571428\ldots$