Chapitre 1

Techniques de calcul - Trigonométrie

Les fondamentaux du cours

1 Développement - Factorisation

Proposition 1.1 (Identités remarquables)**.**
Soient a, b et c des réels quelconques. On a :

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
(ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
(iii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$.

Remarque. En remplaçant b par $-b$, on déduit d'autres identités remarquables.

Proposition 1.2 (Factorisation)**.**
Soient a et b des réels quelconques. On a :

(i) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$;
(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Proposition 1.3 (Factorisation d'un trinôme du second degré dans $\mathbf{R}$)**.**
Soient le trinôme du second degré ax^2+bx+c, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

(i) Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_0)^2.$$

(*ii*) *Si* $\Delta > 0$, *le trinôme admet deux racines réelles* $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et pour tout réel* x *:*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

(*iii*) *Si* $\Delta < 0$, *le trinôme du second degré n'admet pas de racine dans* $\mathbf{R}$.

Preuve. On met sous forme canonique :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

(*i*) Si $\Delta > 0$, il vient :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right). \end{aligned}$$

(*ii*) Si $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x - x_0\right)^2.$$

(*iii*) Si $\Delta < 0$, on pose $\Delta = -\delta^2$ et on obtient :

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\delta^2}{4a^2}\right).$$

Donc le trinôme du second degré ne s'annule jamais sur $\mathbf{R}$.

$\square$

Corollaire (Relations entre coefficients et racines d'un trinôme)**.**
Soient a, b *et* c *des réels quelconques avec* $a \neq 0$. *Si le trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$ *admet deux racines* x_1 *et* x_2, *éventuellement égales, dans* $\mathbf{R}$, *alors :*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve.
Il suffit de développer $a(x - x_1)(x - x_2)$ ou $a(x - x_0)^2$ selon la valeur de Δ, puis par identification, on déduit le résultat voulu. $\square$

2 Puissances

Proposition 1.4 (Formulaire des puissances)**.**
Soient x, y des réels quelconques et α, β des entiers quelconques. On a :

- (i) $x^0 = 1$;
- (ii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
- (iii) *si* $x \neq 0$, $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
- (iv) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
- (v) *si* $y \neq 0$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$;
- (vi) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

3 Fonctions circulaires - Trigonométrie

Définition 1.1 (Cercle trigonométrique)**.**
Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé ***cercle trigonométrique****.*

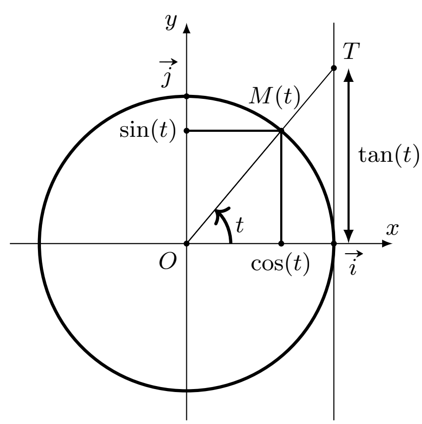
Définition 1.2 (Cercle trigonométrique)**.**
Soit c un réel strictement positif. On dit que deux réels a et b sont ***congrus modulo c*** *— que l'on notera $a \equiv b\ [c]$ — si leur différence est un multiple de c, c'est-à-dire si $a = b + kc$ avec k entier.*

Remarque. Si a et b ne sont pas congrus modulo c, on note alors $a \not\equiv b\ [c]$.

Exemple 1.1. *Si $t = 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors $t \equiv 0\ [2\pi]$ et si $t \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, on écrit alors $t \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$*

Définition 1.3 (Fonctions sinus, cosinus et tangente)**.**
Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$ soit égal à t.

- (i) *On appelle* ***cosinus*** *du réel t l'abscisse de $M(t)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et* ***sinus*** *de ce réel l'ordonnée de $M(t)$.*
  On définit ainsi deux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$ notées cos *et* sin.
- (ii) *Pour un réel $t \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, la droite $OM(t)$ coupe la droite verticale d'équation $x = 1$ en un point T d'ordonnée* $\tan(t)$.
  On définit ainsi une fonction π-périodique sur $\mathbf{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ notée tan.



Remarque. On a pour tout réel t :

- $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
- $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$.
- $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$.
- Si $t \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

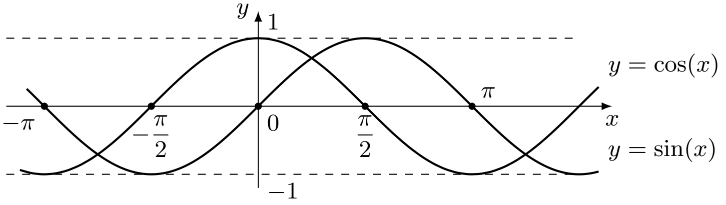
Proposition 1.5.

(*i*) *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues et dérivables sur* $\mathbf{R}$.

(*ii*) *Pour tout* $x \in \mathbf{R}$ *:*

$$\sin'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad \cos'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x).$$

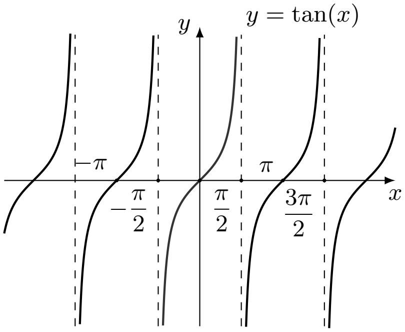
(*iii*) *La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.*



(*iv*) *La fonction* ***tangente*** *est définie sur* $\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$ *par* $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(*v*) *La fonction* tan *est impaire et* π*-périodique.*

(*vi*) tan *est continue et dérivable sur tout intervalle où elle est définie, et pour tout* $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.



Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Proposition 1.6.
On a pour tout réel x, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

PREUVE. Commençons par remarquer que, puisque la fonction sinus est bornée par -1 et 1, il suffit d'établir cette relation pour $|x| \leqslant 1$.
Or, la fonction $f : x \mapsto x - \sin(x)$ étant dérivable sur $[0;1]$ avec $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$, on en déduit qu'elle est croissante sur $[0;1]$, et comme $f(0) = 0$ on obtient $f(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle, ce qui montre que :

$$\forall x \in [0;1], \quad \sin(x) \leqslant x.$$

Il suffit alors de remarquer que $\sin x \geqslant 0$ pour $x \in [0;1]$ pour pouvoir écrire :

$$\forall x \in [0;1], \quad |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

La fonction sinus étant impaire on en déduit alors :

$$\forall x \in [-1;0], \quad \sin(-x) \leqslant (-x) \iff -\sin(x) \leqslant -x \iff |\sin(x)| \leqslant |x|.$$

On a ainsi monté la relation sur $[-1;1]$, donc sur $\mathbf{R}$ tout entier. $\square$

Proposition 1.7 (Symétries)**.**
Soit un réel t, on a :

(*i*) $\cos(-t) = \cos(t)$;

(*ii*) $\sin(-t) = -\sin(t)$;

(*iii*) $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$;

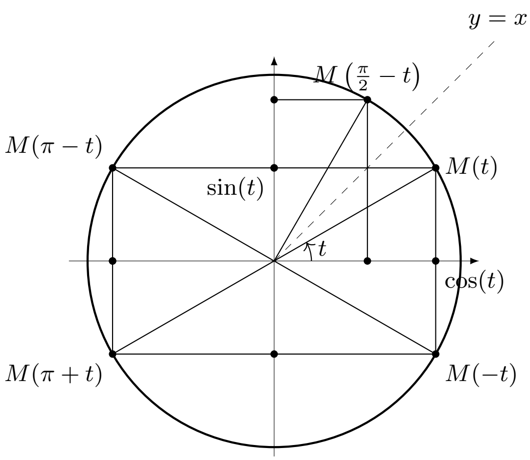
(*iv*) $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$;

(*v*) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$;

(*vi*) $\sin(\pi - t) = \sin(t)$;

(*vii*) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$;

(*viii*) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$.



Remarque. On a de même, sous réserve d'existence :

- $\tan(-t) = -\tan(t)$.
- $\tan(\pi + t) = \tan(t)$.
- $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$.
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dfrac{1}{\tan(t)}$.

Proposition 1.8 (Formules d'addition)**.**
Soient a et b des réels.

(*i*) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
(*ii*) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;

(iii) Sous conditions d'existence, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

Remarque.
En remplaçant b par $-b$, on déduit ainsi les formules suivantes :
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

Proposition 1.9 (Formules de duplication)**.**
Pour un réel a, on a :

(i) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ *;*
(ii) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ *;*
(iii) En cas d'existence :

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Méthodes

Méthode 1 : Savoir mettre sous forme canonique

Pour transformer un trinôme du second degré du type ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ en la somme (ou la différence) de deux carrés, on peut procéder comme suit :

1. écrire :
$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$
2. Si $c - \dfrac{b^2}{4a} \geqslant 0$, alors poser $d = \sqrt{c-\dfrac{b^2}{4a}}$ pour obtenir :
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + d^2.$$
3. Si $c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$, alors poser $d = \sqrt{\dfrac{b^2}{4a}-c}$ pour obtenir :
$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - d^2.$$

Exemple 1.1

Montrer que pour tous réels x et t, on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geqslant 0$.

Solution

Comme $1 + \cos(t)$ est toujours positif, on écrit :

$$x^2 + 4x + \cos(t) + 5 = (x+2)^2 + 1 + \cos(t) \geqslant (x+2)^2,$$

ce qui prouve bien que pour tous réels x et t, on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geqslant 0$.

Méthode 2 : Savoir trouver la 2e racine de $ax^2 + bx + c$

Si l'on connaît une racine x_1 du trinôme ax^2+bx+c ($a \neq 0$), alors pour trouver la deuxième racine x_2 (éventuellement égale à x_1), on peut utiliser l'une des deux relations du corollaire 1 de la page 10 :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque. Cette méthode permet de gagner du temps quand une des racines est « évidente » car il est alors inutile de calculer le discriminant pour obtenir la deuxième racine du trinôme du second degré.

Exemple 1.2

Soient $t \in \mathbf{R}$ et $P(x) = 2x^2 + (\sin(t) - 2\cos(t))x - \sin(t)\cos(t)$.
Calculer $P(\cos(t))$ et en déduire l'ensemble des racines de P.

Solution

On obtient immédiatement $P(\cos(t)) = 0$, ainsi $x_1 = \cos(t)$ est une racine de P et on en déduit que $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = \frac{-\sin(t) + 2\cos(t)}{2} - \cos(t) = -\frac{\sin(t)}{2}$ est également racine de P.

✓ Pour la détermination de la seconde racine, il est préférable d'utiliser la relation $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, car la deuxième relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ peut donner lieu à une division par 0.

Méthode 3 : Savoir utiliser l'expression conjuguée

Pour écrire une fraction du type $F = \frac{\alpha}{a+\sqrt{b}}$ ou $F = \frac{\alpha}{a-\sqrt{b}}$ sous la forme $F = \frac{\beta}{c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, multiplier le numérateur et le dénominateur de F par $a - \sqrt{b}$ pour la première forme et $a + \sqrt{b}$ pour la seconde forme (appelée expression conjuguée du dénominateur) afin d'obtenir :

$$\frac{\alpha}{a+\sqrt{b}} = \frac{\alpha(a-\sqrt{b})}{a^2-b} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{a-\sqrt{b}} = \frac{\alpha(a+\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

Exemple 1.3

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

Solution

On obtient $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+x}+1 = 2$.

Méthode 4 : Savoir résoudre un système linéaire de petite taille

Pour cela, on peut suivre le plan suivant :

1. appliquer une ou plusieurs des opérations élémentaires sur les lignes du système : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$ et $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$;
2. se ramener à un système avec un nombre décroissant d'inconnues ;
3. résoudre le système réduit obtenu en « remontant la résolution des équations ».

Exemple 1.4

Résoudre les systèmes suivants :

$$\textit{1/}\ (S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 1 \end{array} \right. \quad ; \quad \textit{2/}\ (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array} \right. .$$

Solution :

1/ Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & & 2y & = & 1 \end{array} \right. \overset{L_2 \leftarrow L_2/2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ & & y & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

nous permettent de conclure que le système (S_1) admet pour unique solution, le couple $(x,y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2/ Les opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array} \right. \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & 6z & = & 7 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 5z & = & 2 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ & & & & 3z & = & 6 \end{array} \right. .$$

On conclut que le système (S_2) admet pour unique solution $(x,y,z) = (-13,-5,2)$.