Rappels de quelques résultats

Chapitre 1

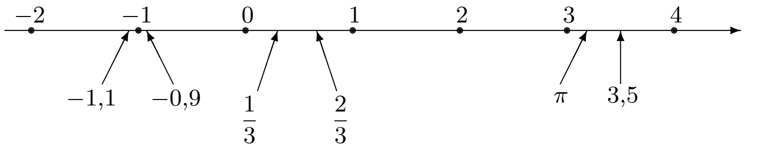
Algèbre

1 Les nombres réels

Un **nombre réel** peut être représenté par une **écriture décimale illimitée**, éventuellement précédée du signe moins. Cette écriture peut se terminer par une infinité de 0 répétés. On a la notion de réel positif et de réel négatif.

Définition 1. *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

L'ensemble $\mathbb{R}$ est exactement l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée :



$$-2 = -2{,}0000\ldots \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \qquad \pi = 3{,}1415926\ldots \qquad 3{,}5 = 3{,}5000\ldots$$

Théorème 2. (règle d'annulation) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$a \times b = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

Pour qu'un produit soit nul il faut et il suffit qu'**un de ses facteurs** soit nul.

2 Puissances d'exposant entier

Proposition 3. (identités remarquables) *Pour tous réels a, b, on a :*

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ATTENTION ! $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ $(a-b)^2 \neq a^2-b^2$

On peut utiliser les identités remarquables **à l'envers**, pour factoriser :

$a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$ $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2$ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

Définition 4. *Soit u un réel, α un entier ≥ 1, on pose :*

$$u^\alpha = \underbrace{u \times u \times \cdots \times u}_{\alpha \text{ facteurs}}$$

Les **entiers relatifs** sont tous les entiers positifs ou négatifs :

$$\ldots, -3, \; -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \; \ldots$$

Proposition 5. *Soient u, v des **réels** $\neq 0$, et α, β des entiers relatifs. On a :*

$1^\alpha = 1$	$u^\alpha \times u^\beta = u^{\alpha+\beta}$
$u^0 = 1$	$(uv)^\alpha = u^\alpha v^\alpha$
$u^1 = u$	$(u^\alpha)^\beta = u^{\alpha\beta}$
$u^{-\alpha} = \dfrac{1}{u^\alpha}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)^\alpha = \dfrac{u^\alpha}{v^\alpha}$

3 Inégalités

• *On peut **ajouter ou retrancher un même nombre** des deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas :*

Proposition 6. *Pour tous réels a, b, c on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a+c \leq b+c$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a-c \leq b-c$$

• *On peut **multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif** les deux côtés d'une inégalité, et le sens ne change pas :*

Proposition 7. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c > 0$ on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ac \leq bc$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$$

• *On peut **multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif** les deux côtés d'une inégalité, et **le sens change**.*

Proposition 8. *Pour tous réels a, b, c, tels que $c < 0$ on a :*

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad ac \geq bc$$
$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$$

Chapitre 2

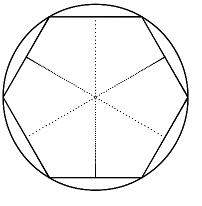
Géométrie plane

1 Polygones

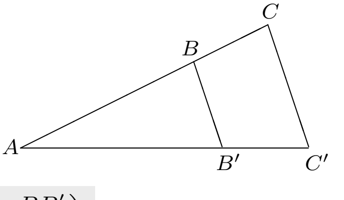
Définition 1. *Un polygone (non croisé) est une* ***ligne brisée fermée*** *qui ne se recoupe pas, et qui est composée d'un nombre fini de segments. Ces segments sont les* ***côtés*** *du polygone, leurs extrémités sont les* ***sommets*** *du polygone.*

Définition 2. *Un polygone est dit* ***régulier*** *si tous ses côtés ont même longueur et si tous ses angles sont égaux.*

Proposition 3. *Dans un polygone* ***régulier*** *les médiatrices des côtés sont concourantes en un même point, appelé* ***centre*** *du polygone. Il existe un cercle centré en ce point, et qui contient tous les sommets du polygone. On l'appelle le* ***cercle circonscrit*** *au polygone.*



2 Théorème de Thalès



Théorème 4. (théorème de Thalès) *Soit ACC' un triangle, et soient des points $B \in (AC)$ et $B' \in (AC')$. Alors :*

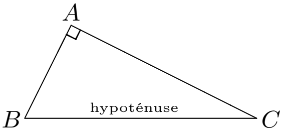
$$(BB') \mathbin{/\!/} (CC') \Rightarrow \left(\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'} \right)$$

Noter que les deux égalités sont du type :

$$\frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}} = \frac{\text{petit}}{\text{grand}}$$

3 Théorème de Pythagore

Définition 5. *Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté situé en face de l'angle droit, c'est **le plus grand** des côtés.*



Théorème 6. (théorème de Pythagore) *Dans un triangle rectangle le **carré de l'hypoténuse** est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

Proposition 7. *La diagonale d'un carré de côté a vaut* $a\sqrt{2}$

Proposition 8. *La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a vaut* $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

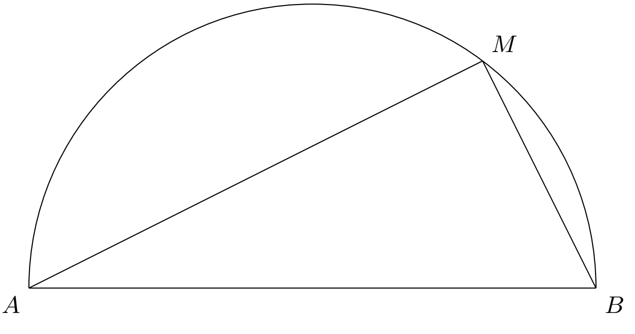
Théorème 9. (réciproque du théorème de Pythagore) *Si dans un triangle ABC on a :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

alors ABC est rectangle en A.

4 Théorème du demi-cercle

Théorème 10. (théorème du demi-cercle) *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[AB]$, si $M \neq A$ et $M \neq B$, alors $(MA) \perp (MB)$.*



Théorème 11. (réciproque du théorème du demi-cercle) *Si un triangle MAB est rectangle en M, son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.*

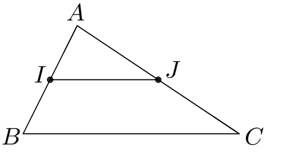
Autrement dit : *Si un triangle est rectangle, son cercle circonscrit a pour diamètre son **hypoténuse.***

5 Droite des milieux, médiane

Définition 12. *La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est appelée **droite des milieux** de ce triangle.*

Théorème 13. (droite des milieux) *Si une droite passe par les milieux de deux côtés d'un triangle alors elle est parallèle au troisième côté.*

Proposition 14. *Dans un triangle, la droite issue du milieu d'un côté, et parallèle à un deuxième côté, passe par le milieu du troisième côté.*

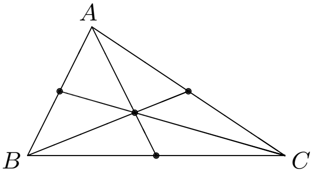


Proposition 15. *Si I et J sont les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$ on a :*

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Définition 16. *Dans un triangle on appelle **médiane** toute droite issue d'un sommet et passant par le milieu du côté opposé.*

Proposition 17. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un même point appelé **centre de gravité du triangle**.*



Proposition 18. *Le centre de gravité d'un triangle est situé au tiers de chaque médiane en partant des milieux des côtés.*

6 Angle, arc, cosinus

On a vu en classe de 6^e qu'un ***angle*** est l'***écart*** qui existe entre deux segments ayant une extrémité commune, ou entre deux demi-droites de même origine. Au collège, on ne considère que des angles dont la mesure α en degrés vérifie :

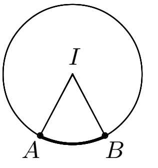
$$0 \leq \alpha \leq 180$$

Généralement, on ne fait pas de différence entre un angle et sa mesure. Donc, si ABC est un triangle, écrire :

$$\widehat{BAC} = 30°$$

signifie que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

Définition 19. *Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et soient A et B deux points de $\mathscr{C}$, distincts. On dit que $\widehat{AIB}$ est* ***l'angle au centre*** *qui* ***intercepte l'arc*** $\overset{\frown}{AB}$.



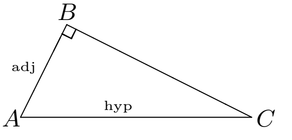
Dans cette définition, on suppose implicitement que A et B ne sont pas diamétralement opposés, et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ dont il est question est le **petit** morceau du cercle $\mathscr{C}$, situé entre A et B.

Proposition 20. *Sur un cercle, les longueurs des arcs sont* ***proportionnelles*** *aux angles qui les interceptent.*

Le **cosinus** d'un angle est une **grandeur abstraite** qu'on ne peut pas mesurer avec un rapporteur, et qui remplace l'angle lui-même.

Définition 21. *Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose :*

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$



Théorème 22. (théorème de la projection orthogonale) *La projection orthogonale entre deux axes formant un angle aigu α multiplie les distances par $\cos\alpha$.*

Corollaire 23. *La projection du milieu de deux points est le milieu des projections de ces deux points.*