# Fonctions

## 1 – De l'art de tracer des courbes « mentalement »

Tracer « mentalement » dans un repère orthonormé les courbes représentatives des 9 fonctions suivantes :

**1.** $x \mapsto \sqrt{-x}$ .

**2.** $x \mapsto \sqrt{|x|}$ .

**3.** $x \mapsto -\ \big|2 \times |x+1| - 3\big|$.

**4.** $x \mapsto 2\,(x-1)^2\ - 3$.

**5.** $x \mapsto \left|2(x-1)^2 - 3\right|$.

**6.** $x \mapsto 2\left(|x|-1\right)^2\ - 3$.

**7.** $x \mapsto 2\,x^2\ - 4x - 1$.

**8.** $x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x-3}$.

**9.** $x \mapsto \dfrac{2x-5}{x-3}$.

## 2 – Résolution de l'inéquation $\sqrt{x+1}\ \leqslant x - 1$

À la question : Résoudre dans **R** l'inéquation $\sqrt{x+1}\ \leqslant x - 1$, un élève propose :

Je travaille sur l'intervalle $[-\,1, +\,\infty[$.

$\sqrt{x+1}\ \leqslant x - 1$

$$\Rightarrow x + 1 \leqslant (x-1)^2 \Rightarrow x + 1 \leqslant x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 - 3x \Rightarrow x(x-3) \geqslant 0.$$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x(x-3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$S = [-\,1, 0] \cup [3, +\,\infty[.$$

Qu'en pensez-vous ?

## 3 – Étude d'une cissoïde

Soit $g$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par $g(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

**1.** Étudier le signe de $g(x)$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $g$.

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1[$ par $f(x) = \sqrt{g(x)}$.

**3.** Étudier les variations de la fonction $f$.

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x(x^2 + y^2) = y^2$ c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan de coordonnées $(x, y)$ tels que $x(x^2 + y^2) = y^2$.

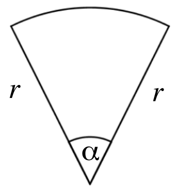
**4.** Montrer que les points de la courbe $\mathscr{C}$ ont une abscisse appartenant à l'intervalle $[0, 1[$.

**5.** Exprimer $y$ en fonction de $x$.

**6.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

## 4 – Maximum de l'aire d'un secteur circulaire de périmètre 100

On souhaite trouver parmi tous les secteurs circulaires, de rayon $r$ et d'angle $\alpha$ en radians, ayant un périmètre égal à 100 et une aire égale à $a$, celui qui a la plus grande aire.




Montrer que $2r + r\alpha = 100$ et $a = \dfrac{1}{2}\alpha r^2$.

Première méthode

Exprimer $a$ en fonction de $r$ puis étudier le maximum de la fonction $r \mapsto a$.

Deuxième méthode

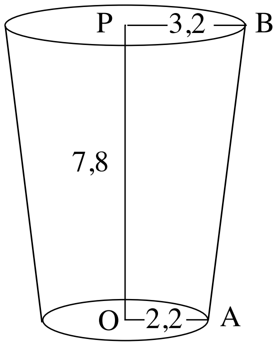
Exprimer $a$ en fonction de $\alpha$ puis étudier le maximum de la fonction $\alpha \mapsto a$.

Troisième méthode

Montrer que pour tous $x$ et $y$ réels, $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ puis exploiter cette égalité en posant $x = 2r$ et $y = r\alpha$.

### 5 – Graduation d'un gobelet

Un gobelet, ayant la forme d'un tronc de cône de révolution de hauteur OP égale à 7,8 centimètres et de rayon de bases OA égal à 2,2 centimètres et PB égal 3,2 centimètres, est représenté ci-dessous à l'échelle 1/ 2.




Le but de l'exercice est de graduer le gobelet. Plus précisément on souhaite déterminer :

La position des points $X_1$, $X_2$, ... , $X_9$ sur le segment [OP] tel que, en remplissant le verre jusqu'au point $X_i$ de sa hauteur, on obtienne les $i$ dixièmes de son volume où $i$ est un entier compris entre 1 et 9.

La position des points $Y_1$, $Y_2$, ... , $Y_9$ sur le segment [AB] tel que, en remplissant le verre jusqu'au point $Y_i$ de sa génératrice, on obtienne les $i$ dixièmes de son volume où $i$ est un entier compris entre 1 et 9.

On note $v(h)$ le volume de boisson servie en remplissant le gobelet d'une hauteur $h$.

**1.** Montrer que la fonction $v$ est définie sur l'intervalle [0 ; 7,8] par

$$v(h) = \pi\left(\frac{1}{182{,}52}h^3 + \frac{11}{39}h^2 + 4{,}84h\right).$$

**2.** Tracer la courbe de la fonction $v$ et exploiter cette courbe pour obtenir la graduation désirée sur le segment [OP].

**3.** Tracer un patron du gobelet sur lequel figurera la graduation désirée sur le segment [AB].

## 6 – Moyennes de trois nombres

Soit $x$, $y$ et $z$ trois nombres réels strictement positifs.

La moyenne arithmétique $a$ de $x$, $y$ et $z$ est définie par $a = \dfrac{x+y+z}{3}$.

La moyenne géométrique $g$ de $x$, $y$ et $z$ est définie par $g = \sqrt[3]{xyz}$ .

La moyenne harmonique $h$ de $x$, $y$ et $z$ est définie par $h = \dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$.

La moyenne quadratique $q$ de $x$, $y$ et $z$ est définie par $q = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$ .

L'égalité $g = \sqrt[3]{xyz}$ signifie que $g^3 = xyz$.

**1.** Dans cette question on suppose que $0 < x < y < z$ et on souhaite montrer que $x < h < g < a < q < y$.

**a.** Montrer que $x < h$.

**b.** Simplifier $0{,}5(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]$. En déduire que

$$xyz < \frac{x^3+y^3+z^3}{3} \ ; g < a \ ; h < g.$$

**c.** Simplifier $(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2$. En déduire que $a < q$.

**d.** Montrer que $q < z$.

**2.** En utilisant la question 1.b, montrer que pour tous $x$, $y$, $z$ réels positifs, $g \leqslant a$.

**3.** Quel est le maximum du produit de trois nombres réels positifs sachant que leur somme est égale à 12 ?

**4.** Quel est le minimum de la somme de trois nombres réels positifs sachant que leur produit est égal à 64 ?

## 7 – Fonction tangente

Soit $f$ la fonction tangente notée tan et définie par $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthogonal.

**1.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.

**2.** Montrer que $f(x+\pi) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

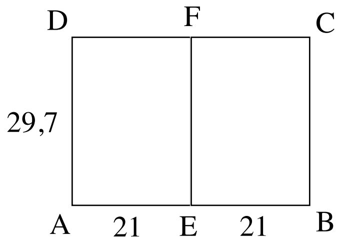
**3.** Comparer $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

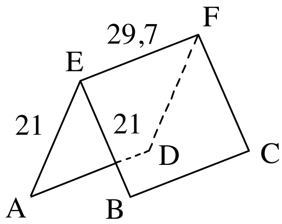
**4.** On décide de poursuivre l'étude de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. Justifier le choix de cet intervalle.

**5.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0, \pi/2[$.
**6.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction tangente sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

## 8 – La tente

À l'aide d'une feuille double de papier on réalise... une tente.




Le but du problème est de disposer la feuille double pour que le volume sous la tente soit le plus grand possible. On souhaite donc maximiser le volume du prisme droit ABCDEF de base un triangle ABE isocèle en E avec AE de mesure 21 centimètres, et de hauteur de mesure 29,7 centimètres.

Montrer que le volume du prisme ABCDEF est maximum si et seulement si l'aire du triangle ABE est maximale.

Première méthode

On choisit comme variable $x$ la moitié de la distance AB et on note $f$ la fonction qui à $x$ associe l'aire du triangle ABE.
**1.** Montrer que la fonction $f$ est définie sur l'intervalle $]0, 21[$ par

$$f(x) = x \times \sqrt{441 - x^2}\,.$$

**2.** Déterminer le maximum de la fonction $f$. On pourra éventuellement utiliser un logiciel de calcul formel.
**3.** Conclure en précisant la particularité du triangle ABE.

Deuxième méthode

On choisit comme variable $\alpha$ une mesure de l'angle $\widehat{AEB}$ en radians et on note $g$ la fonction qui à $\alpha$ associe l'aire du triangle ABE.
**1.** Montrer que la fonction $g$ est définie sur l'intervalle $]0, \pi[$ par

$$g(\alpha) = 220{,}5 \times \sin\alpha$$

**2.** Déterminer le maximum de la fonction $g$.
**3.** Conclure en précisant la particularité du triangle ABE.

Troisième méthode

Soit $x$ la moitié de la distance AB et $y$ la distance EI où le point I est le projeté orthogonal du point E sur la droite (AB).

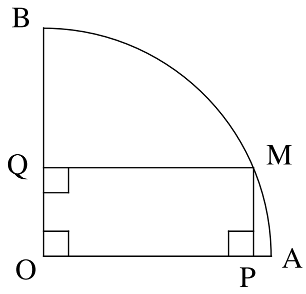
Démontrer l'égalité $xy = 0{,}5[\,x^2 + y^2 - (x-y)^2\,]$ puis l'exploiter pour conclure.

Quatrième méthode

Résoudre le problème en introduisant le projeté orthogonal Y du point A sur la droite (EB).

**9 – Maximum de l'aire d'un rectangle inscrit dans un quart de cercle**

Déterminer la position du point M sur le quart de cercle de centre O et de rayon 21 centimètres pour que l'aire du rectangle OPMQ, où les points P et Q sont les projetés orthogonaux du point M sur les droites (OA) et (OB), soit la plus grande possible.



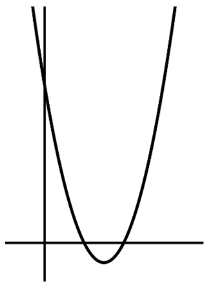
# Fonctions polynômes du second degré

### 10 – Du discret au continu

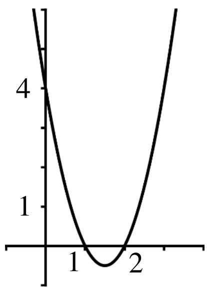
Le directeur d'une salle de spectacle de 8000 places organise un concert. Une étude de marché lui apprend que si le prix du billet est de 50 euros il vend 3000 billets et que chaque baisse de 0,5 euro sur le prix du billet lui permet de vendre 100 billets supplémentaires.
Déterminer le prix du billet pour que la recette du concert soit maximale.

### 11 – Équation d'une parabole

La parabole ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré, $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a$ non nul, dans un repère habituel d'unités non connues.



**1.** Déterminer le signe de $a$, du discriminant $\Delta$, de $c$ et de $b$.
**2.** On connaît maintenant les unités du repère.




Déterminer les valeurs de $a$, $b$ et $c$.

## 12 – Nombre de succès

On répète deux fois une même expérience aléatoire à deux issues : succès et échec. On suppose que la probabilité $p$ d'obtenir un succès est la même pour chacune de ces deux expériences.
Comparer la probabilité des événements A : « obtenir deux succès » ; B : « obtenir un succès » et C : « obtenir aucun succès ».

## 13 – Un ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
**1.** Montrer qu'une équation du cercle de centre I de coordonnées $(a, b)$ et de rayon $r$ est $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
**2.** Soit $m$ un nombre réel et $\mathcal{E}_m$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, y)$ telles que $x^2 + y^2 - 2x + 6y + m = 0$. Déterminer la nature de $\mathcal{E}_m$.

## 14 – Tangentes à un cercle

Dans un repère orthonormé, soit A le point de coordonnées (8, 7) et $\mathcal{C}$ le cercle de centre I de coordonnées (3, 2) et de rayon 1. Tracer les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ passant par le point A puis déterminer une équation de ces tangentes.

## 15 – Résolution d'une inéquation à paramètre

Soit $m$ un nombre réel. Résoudre, dans $\mathbf{R}$, l'inéquation d'inconnue $x$ suivante :

$$m x^2 - x + 1 > 0.$$

## 16 – Le quadrilatère tournant

Soit ABCD un rectangle de longueur $a$ et de largeur $b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que $a \geqslant b > 0$.
Soit E, F, G, H quatre points appartenant respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA] tels que AE = BF = CG = DH = $x$.