Chapitre 1

Fractions

Il est fondamental que vous soyez à l'aise dans la manipulation des fractions (calculs, simplifications, réduction au même dénominateur, etc.). La calculatrice étant interdite au concours, vous ne pourrez pas vous reposer dessus pour faire les calculs. Les problèmes rencontrés dans les sujets de concours ne portent pas spécifiquement sur les fractions, mais il s'agit là d'une notion que vous serez amenés à manipuler régulièrement, comme un outil nécessaire pour répondre à une question dans un problème donné.

Sommaire

1.1 Rappel de cours

Définition (Fraction)

Soient a, b deux entiers tels que $b \neq 0$.
On appelle fraction toute quantité qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$.

Remarques

- $a = \frac{a}{1}$.
- $\frac{0}{a} = 0$, mais $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens ! On ne divise jamais par 0.

Proposition (Opérations sur les fractions)

Soient a, b, c, d des entiers tels que $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

- **Simplification de fractions**

$$\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}.$$

- **Addition de fractions**

$$\frac{a + d}{c} = \frac{a}{c} + \frac{d}{c}.$$

- **Produit de deux fractions**

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Erreurs à éviter

- $\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$ en général.
  Par exemple, $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ *n'est pas égal à* $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} = 1 + 1 = 2$.
- $\dfrac{c+a}{c+b} \neq \dfrac{a}{b}$ en général.
  Par exemple, $\dfrac{2+7}{2+9} = \dfrac{9}{11}$ *et n'est pas égal à* $\dfrac{7}{9}$.
- $\dfrac{a+d}{c+b} \neq \dfrac{a}{c} + \dfrac{d}{b}$ en général.
  Par exemple, $\dfrac{3+4}{1+2} = \dfrac{7}{3}$ *et n'est pas égal à* $\dfrac{3}{1} + \dfrac{4}{2} = 3 + 2 = 5$.

1.2 Méthodes

1.2.1 Simplifier des fractions

Méthode

Pour simplifier une fraction, pensez à décomposer les deux dénominateurs en produit de nombres premiers (entiers qui ne sont pas divisibles par d'autres entiers, tels que 2, 3, 5, 7, ...). Il est important pour cela de bien connaître ses tables de multiplication. On en profitera donc pour les réviser.
On peut alors ensuite simplifier les termes communs qui sont en facteur à la fois au numérateur et au dénominateur, en utilisant la formule

$$\frac{\cancel{c} \times a}{\cancel{c} \times b} = \frac{a}{b}.$$

On appelle **fraction irréductible** une fraction qui ne peut plus être simplifiée.

Erreurs à éviter

$\dfrac{c+a}{c+b} \neq \dfrac{a}{b}$ en général.
On ne peut simplifier par c que si c est en facteur (produit et non somme) au numérateur et au dénominateur.

Exemple 1.1
$\frac{42}{30} = \frac{2 \times 21}{3 \times 10} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5} = \frac{7}{5}$.

1.2.2 Diviser par une fraction

Méthode

On utilisera le fait que

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

En d'autres termes, la division de a par b est égale à la multiplication de a par l'inverse de b qui est $\frac{1}{b}$.

De manière générale, l'inverse de $\frac{b}{c}$ étant $\frac{c}{b}$ (car $\frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1$), on a

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \times \frac{c}{b}.$$

On retiendra que diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

Erreurs à éviter

De manière générale, $\frac{1}{\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{c}\right)} \neq \frac{d}{a} + \frac{c}{b}$.
Le raisonnement précédent ne marche que lorsque l'on a une fraction unique au dénominateur, mais pas avec une somme de fractions.
Dans ce cas, il faut d'abord réduire les fractions au dénominateur et simplifier (cf. la méthode présentée à la Sous-section 1.2.3).

Exemple 1.2
$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ et $\frac{3}{\left(\frac{4}{5}\right)} = 3 \times \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$.

1.2.3 Écrire sous forme d'une fraction irréductible une somme de fractions

Méthode

Pour écrire sous forme d'une fraction irréductible une somme de fractions, on procède comme suit :

1. Décomposer les deux dénominateurs en produit de nombres premiers (entiers qui ne sont pas divisibles par d'autres entiers, tels que 2, 3, 5, 7, ...).
2. Chercher le dénominateur commun le plus petit.
   Le dénominateur commun le plus petit sera composé des nombres premiers apparaissant dans chacun des deux dénominateurs initiaux mis à la plus grande des puissances apparaissant dans les dénominateurs initiaux.
3. Réduire au même dénominateur.
4. Simplifier.

Exemple 1.3

Écrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{2}{18} - \frac{1}{12}$.

On pourrait choisir comme dénominateur commun 18×12, puis calculer $\frac{2 \times 12}{18 \times 12} - \frac{1 \times 18}{12 \times 18}$, mais cela engendre de gros calculs.

Étant donné que la calculatrice est interdite au concours, il vaut mieux chercher le dénominateur commun plus petit, de manière à avoir les calculs les plus simples possibles.

1. **Dénominateur commun le plus petit**
   On a : $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$ et $12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2$.
   D'où, le dénominateur commun le plus petit est $2^2 \times 3^2 = 36$.
   En effet, les entiers apparaissant dans 18 ou 12 sont 2 et 3.
   Dans 18, 2 apparaît à la puissance 1 et dans 12 à la puissance 2.
   D'où la plus grande puissance de 2 intervenant est $\mathbf{2^2}$.
   Dans 18, 3 apparaît à la puissance 2 et dans 12 à la puissance 1.
   D'où la plus grande puissance de 3 intervenant est $\mathbf{3^2}$.
   Le dénominateur commun le plus petit sera donc $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$.
2. **Réduction au même dénominateur**
   On va donc écrire $\frac{2}{18}$ et $\frac{1}{12}$ sur le même dénominateur 36.
   On a $36 = 18 \times \mathbf{2}$.
   D'où $\frac{2}{18} = \frac{2 \times \mathbf{2}}{18 \times \mathbf{2}} = \frac{4}{36}$.

De même, on a $36 = 12 \times \mathbf{3}$.
D'où $\dfrac{1}{12} = \dfrac{1 \times \mathbf{3}}{12 \times \mathbf{3}} = \dfrac{3}{36}$.

3. **Simplification**
Ainsi, $\dfrac{2}{18} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{4}{36} - \dfrac{3}{36} = \dfrac{4-3}{36} = \dfrac{1}{36}$.
Remarque : on peut ensuite regarder si on ne pourrait pas encore simplifier la fraction obtenue à la fin, de manière à la rendre irréductible.

Exemple 1.4 (Généralisation)
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$.
Réduire au même dénominateur $\dfrac{2}{(x+3)^2} - \dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}$.

On peut généraliser la méthode précédente à des expressions littérales.
On procède comme avec des valeurs numériques, en repérant les facteurs communs aux deux dénominateurs et leur puissances respectives, afin de déterminer le dénominateur commun le plus petit.
Ici le dénominateur commun le plus petit sera $(x+2)(x+3)^2$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{(x+3)^2} - \frac{x+1}{(x+2)(x+3)} &= \frac{2 \times \boldsymbol{(x+2)}}{(x+3)^2 \times \boldsymbol{(x+2)}} - \frac{(x+1) \times \boldsymbol{(x+3)}}{(x+2)(x+3) \times \boldsymbol{(x+3)}} \\
&= \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)^2} - \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+3)^2} \\
&= \frac{2(x+2) - (x+1)(x+3)}{(x+2)(x+3)^2} \\
&= \frac{2x + 4 - (x^2 + 4x + 3)}{(x+2)(x+3)^2} \\
&= \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x+2)(x+3)^2}.
\end{aligned}$$

La résolution d'(in)équations avec quotients (cf. Chapitre 5) nécessite de savoir faire ce genre de chose sans se tromper.

1.3 Pour s'entraîner

1.3.1 Exercices

Exercice 1.1
Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les quantités suivantes :

1. $\dfrac{36}{12}$.
2. $\dfrac{45}{27}$.
3. $\dfrac{24}{320}$.
4. $\dfrac{280}{49}$.

Exercice 1.2
Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les quantités suivantes :

1. $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{15}$.
2. $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{15}$.
3. $\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{15}$.
4. $\dfrac{3}{14} - \dfrac{1}{21}$.

Exercice 1.3
Écrire sous la forme d'une fraction irréductible les quantités suivantes :

1. $A = \dfrac{\left(\frac{6}{35}\right)}{3}$.
2. $B = \dfrac{6}{\left(\frac{35}{3}\right)}$.
3. $C = \dfrac{\left(\frac{6}{35}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)}$.
4. $D = \dfrac{3 \times \frac{5}{2} - \frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{3} - 4\right)^2}$.

Exercice 1.4
Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible :

1. $A = \dfrac{3}{12} + \dfrac{2}{16} - \dfrac{1}{2}$.
2. $B = \left(\dfrac{7}{5} - \dfrac{2}{4}\right) - \left(\dfrac{21}{15} - 1 + \dfrac{2}{3}\right)$.
3. $C = \dfrac{\frac{1}{9} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{18} - \frac{1}{27}}$.
4. $D = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.

1.3.2 Corrigés

Solution 1.1

1. $\dfrac{36}{12} = \dfrac{\cancel{4} \times 9}{\cancel{4} \times 3} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times 1} = 3$.
2. $\dfrac{45}{27} = \dfrac{\cancel{9} \times 5}{\cancel{9} \times 3} = \dfrac{5}{3}$.
3. $\dfrac{24}{320} = \dfrac{6 \times 4}{10 \times 32} = \dfrac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{4}}{5 \times \cancel{2} \times 8 \times \cancel{4}} = \dfrac{3}{5 \times 8} = \dfrac{3}{40}$.
4. $\dfrac{280}{49} = \dfrac{28 \times 10}{7 \times 7} = \dfrac{3 \times \cancel{7} \times 2 \times 5}{\cancel{7} \times 7} = \dfrac{30}{7}$.

Solution 1.2

1. Calculons $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{15}$.
   Cherchons le dénominateur commun plus petit.
   On a : $6 = 2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$.

D'où, le dénominateur commun le plus petit est $2 \times 3 \times 5 = 30$.
Or, $30 = 6 \times \mathbf{5}$ et $30 = 15 \times \mathbf{2}$.
Ainsi : $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1 \times \mathbf{5}}{6 \times \mathbf{5}} - \frac{1 \times \mathbf{2}}{15 \times \mathbf{2}} = \frac{5}{30} - \frac{2}{30} = \frac{5-2}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$
et on ne peut pas simplifier plus.

2. Calculons $\frac{5}{12} - \frac{1}{15}$.
Cherchons le dénominateur commun le plus petit.
On a : $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$.
D'où, le dénominateur commun le plus petit est $2^2 \times 3 \times 5 = 60$.
Or, $60 = 12 \times \mathbf{5}$ et $60 = 15 \times \mathbf{4}$.
Ainsi : $\frac{5}{12} - \frac{1}{15} = \frac{5 \times \mathbf{5}}{12 \times \mathbf{5}} - \frac{1 \times \mathbf{4}}{15 \times \mathbf{4}} = \frac{25}{60} - \frac{4}{60} = \frac{25-4}{60} = \frac{21}{60} = \frac{\cancel{3} \times 7}{\cancel{3} \times 20}$
et on ne peut pas simplifier plus.

3. Calculons $\frac{2}{9} + \frac{1}{15}$.
Cherchons le dénominateur commun le plus petit.
On a : $9 = 3^2$ et $15 = 3 \times 5$.
D'où, le dénominateur commun le plus petit est $3^2 \times 5 = 9 \times 5 = 45$.
Or, $45 = 9 \times \mathbf{5}$ et $45 = 15 \times \mathbf{3}$.
Ainsi : $\frac{2}{9} + \frac{1}{15} = \frac{2 \times \mathbf{5}}{9 \times \mathbf{5}} + \frac{1 \times \mathbf{3}}{15 \times \mathbf{3}} = \frac{10}{45} + \frac{3}{45} = \frac{10+3}{45} = \frac{13}{45}$
et on ne peut pas simplifier plus.

4. Calculons $\frac{3}{14} - \frac{1}{21}$.
Cherchons le dénominateur commun le plus petit.
On a : $14 = 2 \times 7$ et $21 = 3 \times 7$.
D'où, le dénominateur commun le plus petit est $2 \times 3 \times 7 = 42$.
Or, $42 = 14 \times \mathbf{3}$ et $42 = 21 \times \mathbf{2}$.
Ainsi : $\frac{3}{14} - \frac{1}{21} = \frac{3 \times \mathbf{3}}{14 \times \mathbf{3}} - \frac{1 \times \mathbf{2}}{21 \times \mathbf{2}} = \frac{9}{42} - \frac{2}{42} = \frac{7}{42} = \frac{\cancel{7}}{\cancel{7} \times 6} = \frac{1}{6}$
et on ne peut pas simplifier plus.

Solution 1.3

1. $A = \frac{\left(\frac{6}{35}\right)}{3} = \frac{6}{35} \times \frac{1}{3} = \frac{6 \times 1}{35 \times 3} = \frac{6}{35 \times 3} = \frac{2 \times \cancel{3}}{35 \times \cancel{3}} = \frac{2}{35}$.
Remarques :
   (a) *L'inverse de* 3 *est* $\frac{1}{3}$.
   (b) *Avant de calculer* 35×3, *on regarde s'il n'y a pas des simplifications à faire.*
2. $B = \frac{6}{\left(\frac{35}{3}\right)} = 6 \times \frac{3}{35} = \frac{6 \times 3}{35} = \frac{18}{35}$.
Remarque :
On ne peut pas simplifier plus car $6 \times 3 = 2 \times 3^2$ *et* $35 = 5 \times 7$ *et il n'y a donc pas de facteurs communs qui puissent se simplifier.*