1.1 La chasse aux petits points

Dans le chapitre consacré aux suites (chapitre 9 du cours de seconde), nous avons rencontré des difficultés à démontrer des théorèmes sur les suites, en particulier le théorème 6 page 322. Pourquoi ? La faute aux petits points !

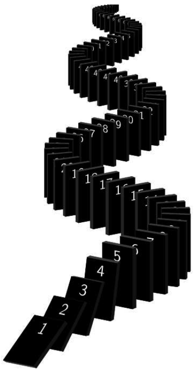
Par exemple, lorsqu'on écrit

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que se passe-t-il à la place des ... ? Est-ce que n est nécessairement supérieur à 3 ?

Il est toujours possible de remplacer $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ par la somme symbolique $\sum_{k=1}^{n} k$ ce qui est plus rigoureux mais ne dissipe pas tous les problèmes.

1.2 La théorie des dominos



Les dominos sont positionnés de telle façon que, si un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant.
Si le premier domino tombe, alors tous les dominos suivants tombent.
Si le premier domino ne tombe pas, alors rien ne se passe. À moins qu'un domino ne tombe plus loin, entraînant avec lui tous les dominos suivants.

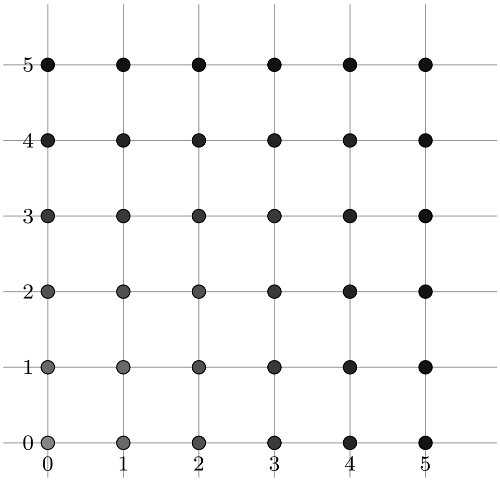
Exercice 1.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_1 = 1$ et la relation valable pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4.
2. Quelle conjecture peut on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ? On veut prouver cette conjecture, voici un nouveau type de raisonnement :
3. Prouver que si pour un certain k ($k \in \mathbb{N}^*$) on a bien $u_k = k^2$, alors $u_{k+1} = (k+1)^2$. On dit que la propriété est « héréditaire ».
4. Conclure et calculer : $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2019$

Solution 1



Un calcul, un dessin permettent de conjecturer que pour tout entier k, $u_k = k^2$.
On sait que pour tout entier k, $u_{k+1} = u_k + 2k + 1$. Donc à supposer que $u_k = k^2$, on en déduit que $u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.
Autrement dit, chaque fois qu'on a un entier k pour lequel la proposition $\mathscr{P}(k) : u_k = k^2$ prend la valeur VRAI, alors cette proposition prend encore la valeur VRAI pour l'entier suivant.
Comme on a $\mathscr{P}(1)$ (puisque $u_1 = 1$) on a $\mathscr{P}(2)$, donc $\mathscr{P}(3)$, ..., donc $\mathscr{P}(n)$, et ce pour tout entier n.
On remarque le retour de ces fichus ....
Pour finir $\displaystyle\sum_{k=0}^{1009}(2k+1) = 1010^2 = 1020100$ (il y a 1010 termes).

Principe du raisonnement par récurrence

On vient d'utiliser un raisonnement par récurrence (on dit aussi par induction). C'est un **principe** de raisonnement (comme le raisonnement par l'absurde) qui sert à établir une proposition valable pour tous les entiers naturels à partir d'un certain rang. Ce raisonnement comporte quatre étapes : La rédaction de la proposition, l'initialisation, l'hérédité et la conclusion.

Soit $I = [\ n_0\ ,\ +\infty\ [\cap \mathbb{N}$ un intervalle non majoré de $\mathbb{N}$.

Soit $\mathscr{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n dont on veut prouver qu'elle est vraie pour tout n dans I (c'est-à-dire pour tout $n \geqslant n_0$).

Théorème 1 (de récurrence)
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathscr{P}$ une proposition dépendant d'une lettre $n \in I = [n_0, +\infty[\cap \mathbb{N}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \mathscr{P}(n_0) \\ \forall k \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n).$$

On en déduit la méthode suivante.

Méthode 1.

Écriture de la proposition. C'est une étape importante qui demande du soin. Il faut faire attention à la quantification.
Initialisation. On vérifie que $\mathscr{P}(0)$ est vraie. (ou $\mathscr{P}(n_0)$)
Hérédité. On fixe un entier $k \in I$ et on montre que

$$\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$$

et ce quel que soit l'entier $k \in I$. Autrement dit, en supposant $\mathscr{P}(k)$ on démontre $\mathscr{P}(k+1)$.
Conclusion. Alors, d'après le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

L'initialisation est nécessaire :

Exemple 1
La « proposition » $\mathscr{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire.
Elle prend la valeur FAUX pour tout entier n.

Démonstration 1
Par contraposée. Soit n un entier pour lequel on n'a pas $\mathscr{P}(n)$. Cela veut dire que l'ensemble J des entiers n pour lesquels on n'a pas $\mathscr{P}(n)$ n'est pas la partie vide. Donc J possède un plus petit élément n_1 d'après l'axiome 1 page 64 du cours de seconde. Cet entier n_1 est caractérisé par

$$\begin{cases} \text{non } \mathscr{P}(n_1) \\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n_0 \leqslant k < n_1,\ \mathscr{P}(k) \end{cases} \qquad (\star)$$

On sait que $n_1 \neq n_0$ puisque, d'après l'initialisation, $\mathscr{P}(n_0)$. Donc $n_1 > n_0$. Donc $n_2 \geqslant n_0$. D'après $(\star)$ on a $\mathscr{P}(n_2)$. D'après l'hérédité appliquée à $k = n_2 = n_1 - 1$ on a $\mathscr{P}(n_2 + 1)$ c'est-à-dire $\mathscr{P}(n_1)$ ce qui est exclus. □

Alors ? Principe ou théorème ? Un principe est un axiome. Il ne se démontre pas. Un théorème se démontre. Pas nécessairement dans ce manuel, mais il se démontre. Ici, on aurait un principe qui se démontrerait ?

En fait, la « démonstration » ci-dessus présuppose que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Cela peut se démontrer ... par récurrence.

Pour couper court à une histoire longue, ces deux propositions sont équivalentes et il est nécessaire d'en admettre une pour démontrer l'autre.

Exercice 2.

Prouver par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'entier $8^n - 1$ est divisible par 7.

Solution 2
Écriture de la proposition : Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$: $8^n - 1$ est divisible par 7.
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $8^n - 1 = 8^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est bien divisible par 7. On a donc bien $\mathscr{P}(0)$.
Hérédité : Soit k un entier naturel. On suppose $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $8^k - 1 = 7p$. En multipliant les deux membres par 8 on en déduit que $8^{k+1} - 8 = 7 \times 8p$ donc $8^{k+1} - 1 = 7 \times 8p - 7 = 7(8p - 1)$ est aussi un multiple de 7. C'est $\mathscr{P}(k+1)$. On a bien démontré

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3.

Prouver par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

voir le théorème 3 page 320 du cours de seconde.

Solution 3
Écriture de la proposition. Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(n) : \qquad \sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On commence par définir la suite σ par récurrence. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma_{n+1} = \sigma_n + n + 1.$$

Initialisation. $\sigma_1 = 1$ et pour $n = 1$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ vaut $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$. Donc on a $\mathscr{P}(1)$.
Hérédité. Soit k un entier naturel. On suppose $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire que $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et on veut démontrer que $\sigma_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$. Or $\sigma_{k+1} = \sigma_k + (k+1)$. D'après $\mathscr{P}(k)$, on en déduit :

$$\sigma_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)(1 + \frac{k}{2}) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ainsi on a bien $\mathscr{P}(k+1)$.
Conclusion. En résumé, on a $\mathcal{P}(1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 4.

1. Justifier que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n^2+n} \geqslant n$
2. En déduire la preuve par récurrence que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

Voir aussi l'exercice 8 page 329 du cours de seconde.

Solution 4

1. Grâce à l'expression conjuguée, (voir paragraphe 5.9.3 page 90 du cours de seconde) on a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n} - n &= \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \geqslant 0\end{aligned}$$

2. Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sqrt{n}.$$

La suite S est définie par récurrence par $S_1 = 1$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$, c'est-à-dire $S_k \geqslant \sqrt{k}$, on en déduit

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geqslant \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}, && \text{d'après } \mathscr{P}(k) \\ &\geqslant \frac{\sqrt{k} \times \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} \\ &\geqslant \frac{k+1}{\sqrt{k+1}}, && \text{d'après la première question,} \\ &\geqslant k+1. \end{aligned}$$

On a donc bien $\mathscr{P}(k+1)$.

Conclusion : En résumé, on a $\mathcal{P}(1)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$, donc, d'après le théorème de récurrence, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(k)$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 5.

D'après l'inégalité triangulaire (théorème 16 page 71 du cours de seconde)

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\forall x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Solution 5
Écriture de la proposition : Soit la proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant de l'entier $n \geqslant 2$:

$$\forall x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{R},\ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Initialisation : Pour $n = 2$, le théorème 16 page 71 du cours de seconde est exactement $\mathscr{P}(2)$.
Hérédité : Soit $k \geqslant 2$ un entier naturel pour lequel on a $\mathscr{P}(k)$. On cherche à établir $\mathscr{P}(k+1)$. Pour cela on se donne $k+1$ réels $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{k+1}$. On pose $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ et $y = x_{k+1}$. D'après $\mathscr{P}(2)$, on a $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ soit

$$\left|\sum_{p=1}^{k+1} x_p\right| \leqslant \left|\sum_{p=1}^{k} x_p\right| + |x_{k+1}|$$

Maintenant, d'après $\mathscr{P}(k)$, on peut majorer $\left|\sum_{p=1}^{k} x_p\right|$ par $\sum_{p=1}^{k} |x_p|$.

Finalement on a bien

$$\left|\sum_{p=1}^{k+1} x_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{k+1} |x_p|$$

et ce pour tous réels $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{k+1}$. On a bien $\mathscr{P}(k+1)$.

Conclusion : $\forall n \geqslant 2,\ \mathscr{P}(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

1.3 Variantes

Ce sont deux déclinaisons classiques du théorème de récurrence.

1.3.1 Récurrence à deux pas

La **récurrence à deux pas** est aussi appelée **récurrence double**.

Théorème 2
Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si} \begin{cases} \mathcal{P}_0 \\ \mathcal{P}_1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+2} \end{cases} \qquad \text{alors } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n.$$

Démonstration 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{H}_n \Longleftrightarrow (\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1})$.

On a $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ c'est-à-dire $\mathcal{H}_0$.

Par ailleurs, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{n+2}$. Or on a clairement $\mathcal{P}_{n+1} \Longleftrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Donc on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n \Longleftrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$. *A fortiori* on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$ □

Exemple 2 (Formule de Binet)

Soit la suite (F_n) définie par : $\begin{cases} F_0 = 0 \quad ; \quad F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{P}_n \ :\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On a clairement $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \varphi'^0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0 = F_0$ soit $\mathcal{P}_0$.

De même, $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \varphi'^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 = F_1$ soit $\mathcal{P}_1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$. On a alors

$$\begin{aligned} F_{n+2} = F_n + F_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n + \varphi^{n+1}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi'^n + \varphi'^{n+1}) \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}(1+\varphi) - \frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}(1+\varphi') \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}(\varphi^2) - \frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}(\varphi'^2), \end{aligned}$$

car φ et φ' sont solutions de $1 + x = x^2$. On a donc bien

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2}),$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+2}$.

Par récurrence à deux pas, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

1.3.2 Récurrence forte

Théorème 3
Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$.

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ (\forall k < n,\ \mathcal{P}_k) \Longrightarrow \mathcal{P}_n$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n$.

Démonstration 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{H}_n \Longleftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}_n)$.

La proposition $\mathcal{H}_0$ prend la valeur logique VRAI puisqu'il n'existe pas d'entier naturel $k < n$, donc pas de contrexemple ! Autrement dit une récurrence forte ne nécessite pas d'initialisation.

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel on a $\mathcal{H}_n$. On a alors $\mathcal{P}_n$. Comme on a déjà $\forall k < n,\ \mathcal{P}_k$, on a donc $\forall k < n+1,\ \mathcal{P}_k$, c'est-à-dire $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après le théorème de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}_n$. *A fortiori* on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_{n-1}$. □

Exemple 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. On se propose de démontrer que $\forall n \geqslant 2,\ H_n \notin \mathbb{N}$:

Soit $n \geqslant 2$. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$: il existe un entier pair p_n et un entier impair i_n tels que $H_n = \dfrac{i_n}{p_n}$.

On a clairement $\mathcal{P}_2$ avec $i_2 = 3$ et $p_2 = 2$.

Soit $n \geqslant 3$ un entier pour lequel on a $\forall k < n,\ \mathcal{P}_n$.

- Si n est impair, alors
$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{i_{n-1}}{p_{n-1}} + \frac{1}{n} = \frac{ni_{n-1} + p_{n-1}}{np_{n-1}} = \frac{i_n}{p_n},$$
en posant $i_n := ni_{n-1} + p_{n-1}$ qui est impair et $p_n := np_{n-1}$ qui est pair.
- Si n est pair, alors $n \geqslant 4$ et $n = 2q$ avec $q \geqslant 2$. En séparant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair,
$$H_n = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} H_q.$$
On réduit la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2k-1} = \frac{m}{i}$ où l'entier impair i est le produit de tous les nombres impairs inférieurs à n. Donc d'après $\mathcal{P}_q$, on a
$$H_n = \frac{m}{i} + \frac{i_q}{2p_q} = \frac{2mp_q + ii_q}{2ip_q} = \frac{i_n}{p_n},$$
en posant $i_n := 2mp_q + ii_q$ qui est impair et $p_n := 2ip_q$ qui est pair.

On a bien $\mathcal{P}_n$ dans les deux cas.

On a démontré par récurrence forte que $\forall n \geqslant 2,\ P_n$. En particulier on a $H_n \notin \mathbb{N}$.