Chapitre 1

Géométrie plane

1 Médiatrices et cercle circonscrit

En géométrie, on note parfois les angles avec les premières lettres de l'**alphabet grec** : $\boxed{\alpha}$ se prononce "alpha", $\boxed{\beta}$ se prononce "béta", $\boxed{\gamma}$ se prononce "gamma".

Pour certains points, on utilise aussi la lettre grecque $\boxed{\omega}$ qui se lit "petit oméga" et la lettre $\boxed{\Omega}$ qui se lit "grand oméga"

Définition 2. *La **médiatrice** d'un segment est la droite issue du milieu de ce segment, et qui lui est perpendiculaire.*

Tout point de la **médiatrice** d'un segment, est **équidistant** de ses extrémités :

Théorème 3. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

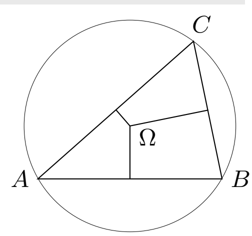
$$M \in d \;\Rightarrow MA = MB$$

Le symbole logique $\boxed{\Rightarrow}$ se lit "**implique**", et signifie "**alors**". La **réciproque** de ce théorème est vraie, et dit que tout point **équidistant** de deux points, est sur la **médiatrice** du segment joignant ces deux points :

Théorème 4. *Soient A et B deux points du plan, distincts, et soit d la médiatrice de $[AB]$. Pour tout point M du plan on a :*

$$MA = MB \;\Rightarrow M \in d$$

Proposition 5. *Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont **concourantes** en un même point Ω. Le cercle centré en Ω et passant par l'un des sommets du triangle passe aussi par les deux autres sommets.*



Définition 6. *Le cercle précédent est appelé **cercle circonscrit** au triangle ABC.*

2 Les angles

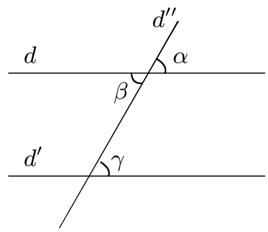
Théorème 1. *La somme des angles d'un triangle vaut* 180°.

Définition 2. *Deux angles dont la somme vaut* 90° *sont dits* ***complémentaires***.

Corollaire 3. *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

Proposition 4. *Si un triangle est à la fois rectangle et isocèle, ses angles à la base valent* 45°.

Définition 5. *Soient* d *et* d' *des droites* ***parallèles***, *coupées par une droite* d''. *Ces trois droites définissent trois angles* α, β *et* γ *qui sont nommés ainsi :*
- α *et* β *opposés par le sommet,*
- β *et* γ *alternes-internes,*
- α *et* γ *correspondants.*

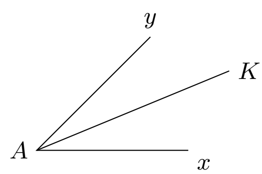


Proposition 6. *Les angles alternes-internes, opposés par le sommet, correspondants sont égaux.*

3 Bissectrices et cercle inscrit

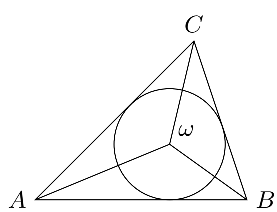
Proposition 1. *Soit* $\widehat{xAy}$ *un angle. Il existe une demi-droite* $[AK)$ *telle qu'on ait* $K \in \widehat{xAy}$ *et de plus :*

$$\widehat{KAx} = \widehat{KAy}$$



Définition 2. *La* ***demi-droite*** $[AK)$ *est appelée* ***bissectrice*** *de l'angle* $\widehat{xAy}$. *La bissectrice d'un angle est donc la demi-droite issue du sommet de cet angle, et qui partage l'angle en* ***deux angles égaux***.

Proposition 3. *Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un même point* ω. *Le cercle centré en* ω *et* ***tangent*** *à l'un des côtés du triangle est* ***tangent*** *aux deux autres côtés.*



Définition 4. *Le cercle précédent est appelé* ***cercle inscrit*** *dans le triangle* ABC.

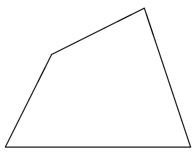
4 Théorème du demi-cercle

Théorème 1. (théorème du demi-cercle) *Pour tout point M d'un cercle de diamètre $[AB]$, si $M \neq A$ et $M \neq B$, alors $(MA) \perp (MB)$.*

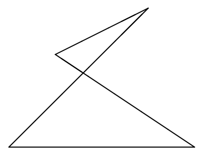
Théorème 2. (réciproque du théorème du demi-cercle) *Si un triangle MAB est rectangle en M, son cercle circonscrit a pour diamètre $[AB]$.*

5 Parallélogramme

Dans ce livre, les quadrilatères considérés ne sont **pas croisés** :

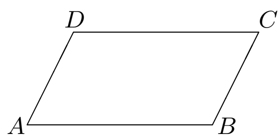


quadrilatère **non croisé**



quadrilatère **croisé**

Définition 1. *Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.*



Proposition 2. *Dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles consécutifs sont supplémentaires.*

Proposition 3. *Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux.*

On a les **équivalences** ou **critères** suivants :

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux côtés parallèles et égaux}}$$

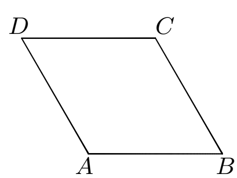
$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{deux couples de côtés opposés égaux}}$$

$$\boxed{\text{parallélogramme} \Leftrightarrow \text{diagonales de même milieu}}$$

Définition 4. *On appelle **centre** d'un parallélogramme le milieu de ses diagonales.*

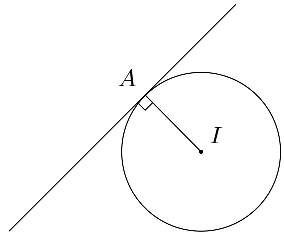
Définition 5. *Un **losange** est un quadrilatère dont les quatre côtés ont même longueur.*

Proposition 6. *Un losange est un **parallélogramme**.*



6 Tangente à un cercle

Définition 1. *Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre I, et soit un point A appartenant à $\mathscr{C}$. La droite issue de A et perpendiculaire à (IA) est appelée* ***tangente*** *en A au cercle. On dit que* ***la droite et le cercle sont tangents*** *en A.*



Chapitre 2

Arithmétique

1 Multiples et diviseurs

Définition 1. *On dit qu'un entier a est **divisible** par un entier b si la division de a par b tombe juste, ce qui revient à dire qu'il existe un entier q tel que :*

$$a = b \times q$$

ce qui correspond à la division suivante :

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & q \end{array}$$

Définition 2. *Si a est divisible par b, on dit que b est un **diviseur** de a, et que a est un **multiple** de b.*

On peut trouver les **diviseurs d'un entier** en les associant deux à deux. Par exemple les diviseurs de 24 :

$$\underbrace{1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 24}$$
$$1 \quad \underbrace{2 \quad \dots\dots\dots \quad 12} \quad 24$$
$$1 \quad 2 \quad \underbrace{3 \ \dots\dots \ 8} \quad 12 \quad 24$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \underbrace{4 \quad 6} \quad 8 \quad 12 \quad 24$$

et les diviseurs de 16 :

$$\underbrace{1 \quad \dots\dots\dots \quad 16}$$
$$1 \quad \underbrace{2 \ \dots \ 8} \quad 16$$
$$1 \quad 2 \quad \boxed{4} \quad 8 \quad 16$$

Proposition 3. *Les multiples non nuls de b sont : $b \quad 2b \quad 3b \quad 4b \quad 5b \quad 6b \ \dots$ Il y en a une **infinité**.*

2 Plus grand commun diviseur

Définition 1. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\mathrm{pgcd}(a, b)$ *le* ***plus grand commun diviseur*** *des entiers a et b, c'est-à-dire le nombre qui divise* ***à la fois*** *a et b, et qui est le plus grand possible.*

Considérons, par exemple, les diviseurs de 12 :

1	2	3	4	6	12

puis ceux de 8 :

1	2	4	8

Les **diviseurs communs** de 12 et de 8 sont donc :

1	2	4

et le plus grand d'entre eux est 4. Donc :

$$\boxed{\mathrm{pgcd}\,(12, 8) = 4}$$

3 Plus petit commun multiple

Définition 1. *Soient a et b des entiers non nuls. On note* $\mathrm{ppcm}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ *le* ***plus petit commun multiple*** *de a et b, c'est-à-dire le multiple* ***non nul*** *de a et de b qui est le plus petit possible.*

Par exemple, les multiples (non nuls) de 6 sont :

$$6 \quad 12 \quad 18 \quad 24 \quad 30 \quad 36 \quad 42 \quad 48 \quad 54 \quad \ldots$$

La liste ne s'arrête pas, elle est infinie. De même, les multiples (non nuls) de 8 sont :

$$8 \quad 16 \quad 24 \quad 32 \quad 40 \quad 48 \quad 56 \quad \ldots$$

On voit donc que le premier **multiple commun** non nul de 6 et de 8 est 24. On a donc :

$$\boxed{\mathrm{ppcm}(6, 8) = 24}$$

Classe de quatrième