1. Concepts basiques

Ce chapitre introduit ce qu'est un programme linéaire (PL en abrégé), les différentes formes qu'il peut prendre ainsi que les concepts essentiels de solution réalisable et de solution optimale. Il présente aussi une méthode dite du gradient, valable pour des PL de toute petite taille, dont le principe provient de ce que l'on a appris en licence sur l'optimisation d'une fonction différentiable sur un ensemble fermé. Pour avoir un aperçu de la solution d'un PL, une méthode algébrique est proposée, dont le fondement est identique à celui de l'algorithme du simplexe que l'on étudiera plus tard, sauf qu'elle est moins « systématique ». On verra également comment linéariser un problème consistant à optimiser une fonction convexe et linéaire par morceaux sur un ensemble défini par des équations et/ou inégalités linéaires.

1.1. Programme linéaire

Un PL est un problème mathématique d'optimisation comportant des constantes, ou données, et des variables. Les constantes et les variables sont liées par des équations et/ou des inégalités linéaires appelées contraintes. Certaines variables sont astreintes à la non négativité alors que d'autres sont libres en signe. Une variable libre en signe peut être négative, nulle ou positive. Un PL comporte en outre une fonction objectif linéaire en les variables qu'il s'agit de maximiser ou minimiser.

Quitte à renuméroter les variables, à changer l'ordre des contraintes et le signe de tous les coefficients $c_1, \cdots, c_n$, le modèle mathématique d'un PL, dit de forme générale, se présente ainsi :

$$
\begin{array}{llllllll}
\max z = & c_1x_1 & \cdots & +c_rx_r & +c_{r+1}x_{r+1} & \cdots & +c_nx_n & & \\
& a_{11}x_1 & \cdots & +a_{1r}x_r & +a_{1,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{s1}x_1 & \cdots & +a_{sr}x_r & +a_{s,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{sn}x_n & \leq & b_s \\
& a_{s+1,1}x_1 & \cdots & +a_{s+1,r}x_r & +a_{s+1,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{s+1,n}x_n & \geq & b_{s+1} \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{t1}x_1 & \cdots & +a_{tr}x_r & +a_{t,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{tn}x_n & \geq & b_t \\
& a_{t+1,1}x_1 & \cdots & +a_{t+1,r}x_r & +a_{t+1,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{t+1,n}x_n & = & b_{t+1} \\
& \vdots & & & & & & \vdots & \\
& a_{m1}x_1 & \cdots & +a_{mr}x_r & +a_{m,r+1}x_{r+1} & \cdots & +a_{mn}x_n & = & b_m \\
& x_1 \geq 0 & \cdots & x_r \geq 0 & & & & &
\end{array}
$$

Il comporte n variables $x_1, \cdots, x_n$. On distingue trois parties toujours présentes :

- La première ligne consiste en la fonction $z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ qui est linéaire en les n variables et qui doit être maximisée ou minimisée. La fonction z est appelée fonction objectif car elle traduit l'objectif du problème (minimiser la longueur de chutes de papier lors d'une découpe, maximiser un profit, etc.).

- La dernière ligne indique que les variables $x_1, \cdots, x_r$ doivent être non négatives alors que, lorsqu'on ne met rien à leur propos, les variables $x_{r+1}, \cdots, x_n$ peuvent être de n'importe quel signe. On dit que les r premières variables sont astreintes à la non négativité alors que les $n - r$ autres sont libres en signe. Notons que r peut éventuellement être nul.
- Les autres lignes concernent ce qu'on appelle les m contraintes du problème. Il y a s inégalités linéaires du type $\leq$, $t - s$ inégalités linéaires du type $\geq$ et $m - t$ équations linéaires.
- Les données du problème sont les n nombres réels $c_1, \cdots, c_n$ appelés coefficients de la fonction objectif, les m réels $b_1, \cdots, b_m$ appelés coefficients à droite des contraintes et les $m \times n$ réels $a_{11}, \cdots, a_{mn}$.

Le PL pose la question suivante : compte-tenu de toutes les données, quelles valeurs donner aux variables $x_1, \cdots, x_n$ de manière à ce que les contraintes, y compris celles de signe, soient satisfaites et que la fonction objectif z soit maximum.

EXEMPLE 1.1.– Voici un exemple de PL de forme générale :

$$\begin{array}{rrrrcl}
\min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x_3 & & \\
 & & 5x_2 & -9x_3 & \leq & -2 \\
 & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3 & \geq & 10 \\
 & 7x_1 & -6x_2 & & = & 2 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & &
\end{array}$$

Dans cet exemple $m = 3, n = 3, r = 2, s = 1$ et $t = 2$. Le PL de cet exemple comporte trois variables x_1, x_2, x_3 et trois contraintes dont deux inégalités et une équation. Les variables x_1, x_2 ne peuvent être négatives tandis que x_3 est libre, puisqu'il n'y a aucune restriction sur son signe, et peut donc être éventuellement négative.

REMARQUE 1.1.– Le PL est le modèle mathématique le plus souvent rencontré dans la modélisation de problèmes réels de production, d'allocation de ressources, de logistique et autres (voir par exemple les références [8,13]).

1.2. Exemple de programme linéaire

On présente un exemple de problème dont les données sont fictives où, en partant de l'énoncé, on propose un modèle mathématique qui se trouve être un PL.

Un fermier dispose d'une parcelle de 13 hectares sur laquelle il désire cultiver du blé et du maïs. Il sait par expérience que pour cultiver un hectare de blé, il doit consacrer 3 semaines de travail et 1 quintal d'engrais, et pour cultiver un hectare de maïs, il doit travailler pendant 4 semaines et utiliser 3 quintaux d'engrais. De plus, il ne peut dédier à ces tâches que 42 semaines et il dispose en tout de 24 quintaux d'engrais. En outre, il sait qu'un hectare de blé (respectivement maïs) cultivé lui procurera un bénéfice de $10\ 000$ € (respectivement $12\ 000$ €). Comment doit-il s'y prendre afin de maximiser son profit ? Récapitulons les données au tableau 1.1.

	Blé	Maïs	Quantité de ressource disponible
Bénéfice (en milliers d'euros) par hectare	10	12	
Superficie totale à cultiver			13
Nombre de semaines de travail par hectare	3	4	42
Nombre de quintaux d'engrais par hectare	1	3	24

TABLEAU 1.1. Données du problème du fermier

REMARQUE 1.2.– Pour écrire un modèle mathématique, il faut commencer par définir précisément les variables de décision, car la décision portera sur les valeurs à donner à ces variables.

Déterminons les variables de décision du problème posé. De quoi va dépendre le profit du fermier ? De la façon dont il va partager ses 13 hectares (ou une partie des 13 hectares) en deux parcelles, une parcelle, de superficie inconnue, réservée à la culture du blé et une autre, de superficie également inconnue, réservée à la culture du maïs. Soit donc x_1 la superficie inconnue réservée au blé et x_2 la superficie inconnue réservée au maïs.

Le fermier n'est pas libre de donner des valeurs arbitraires à x_1 et x_2 car elles seront déterminées par les limitations, ou contraintes, imposées par les ressources qui ne sont disponibles qu'en quantités limitées.

De toute évidence, on doit avoir :

$$x_1 + x_2 \leq 13$$

car la somme des deux superficies réservées au blé et au maïs ne doit pas excéder la superficie totale disponible, soit 13 hectares.

La seconde contrainte va porter sur les semaines de travail. Si cultiver un hectare de blé nécessite 3 semaines de travail alors x_1 hectares nécessitent $3x_1$ semaines de travail. De même, si un hectare de maïs nécessite 4 semaines de travail alors x_2 hectares nécessitent $4x_2$ semaines de travail. Enfin, le temps total de travail accompli par le fermier ne doit pas excéder les 42 semaines disponibles. Ce qui se traduit par :

$$3x_1 + 4x_2 \leq 42$$

La troisième contrainte va porter, de manière analogue, sur les quantités d'engrais :

$$x_1 + 3x_2 \leq 24$$

Deux dernières contraintes naturelles sont :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

car x_1 et x_2 sont des superficies ne pouvant être négatives. Ces contraintes ne sont pas superflues car si elles sont omises, on sera amené à accepter des valeurs négatives pour x_1 et x_2, ce qui est une aberration.

Appelons z la valeur du profit. Par abus, z est appelé fonction objectif car l'objectif du fermier est de maximiser z (on devrait écrire $z(x_1, x_2)$). Cette fonction se détermine de manière analogue :

$$z = 10x_1 + 12x_2$$

On est en mesure de réunir les éléments du modèle mathématique du problème du fermier :

$$\begin{array}{lllll} \max z = & 10x_1 & +12x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 13 \\ & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 42 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & & \end{array} \tag{1.1}$$

C'est un PL qui nous accompagnera tout au long du livre pour illustrer les concepts présentés.

REMARQUE 1.3.– Dans la modélisation qui précède, on a implicitement fait quelques hypothèses :

- Toute unité de variable ou de donnée (un quintal d'engrais, une semaine de travail, un hectare de terrain, une unité monétaire) est arbitrairement sécable. Par exemple, il est possible que la superficie x_1 vaille 1,25 hectares, auquel cas le fermier sera amené à travailler pendant $3x_1 = 3{,}75$ semaines sur le champ de blé. En revanche, un tracteur n'est pas sécable. Si le fermier avait 2 tracteurs, il n'y aurait aucun sens à affecter 0,8 tracteur au champ de blé et 1,2 au champ de maïs.
- Si le fermier consacre 3 semaines à l'hectare alors il consacre 6 semaines pour une superficie de 2 hectares. En général, il consacre $3x_1$ semaines pour une superficie de x_1 hectares.
- S'il consacre $3x_1$ semaines à cultiver du blé et $4x_2$ semaines au maïs alors il travaillera pendant $3x_1 + 4x_2$ semaines.

Les deux dernières hypothèses, proportionnalité et additivité, caractérisent une relation linéaire entre les variables et les données. Dans un PL, les variables et les données ne sont liées que par des relations linéaires et les unités de données sont sécables.

1.3. Formes d'un programme linéaire

DÉFINITION 1.1.– Le PL

$$\begin{array}{rllllll} \max z = & c_1x_1 & \cdots & +c_nx_n & & \\ & a_{11}x_1 & \cdots & +a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & \cdots & +a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ & x_1 \geq 0 & \cdots & x_n \geq 0 & & \end{array}$$

est dit de forme canonique. Il est caractérisé par :

- une fonction objectif à maximiser,
- toutes les contraintes sont des inégalités linéaires du type $\leq$,
- toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Le vecteur des variables de décision est $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ avec :

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Les données sont le vecteur $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ et la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ où :

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sous forme condensée, un PL de forme canonique s'écrit :

$$\begin{array}{l} \max z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\ A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

Notons que le PL du fermier (1.1) est de forme canonique.

PROPOSITION 1.1.– Tout PL peut être mis sous forme canonique.

Preuve. Donnons simplement les règles permettant de ramener un PL quelconque à un PL de forme canonique.

1. Toute variable libre x peut s'écrire comme différence de deux variables non négatives. Plus précisément :
$$x \text{ libre } \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - v \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$
2. Minimiser une fonction objectif z est équivalent à maximiser $-z$. De plus, $\min z = -\max(-z)$.
3. Une inégalité du type $\geq$ se ramène à une inégalité du type $\leq$:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i$$

4. Une équation se ramène à deux inégalités :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \\ -a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n \leq -b_i \end{cases}$$

L'équivalence du PL initial et de celui qui est de forme canonique, obtenu par application des 4 règles décrites ci-dessus, provient des équivalences précédentes. ■

EXEMPLE 1.2.– Mettons le PL de l'exemple 1.1 sous forme canonique :

1. En posant $x_3 = x_3' - x_3''$ avec $x_3' \geq 0, x_3'' \geq 0$, le PL devient :

$$\begin{array}{rlllllll} \min z = & -3x_1 & +5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

2. Minimiser z revient à maximiser $w =- z$ (qui est obtenue en changeant le signe de tous les coefficients de la fonction objectif). Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{rlllllll} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

3. L'inégalité :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \geq 10$$

est équivalente à :

$$-4x_1 - 7x_2 - 2x_3' + 2x_3'' \leq -10$$

Le PL équivalent est alors :

$$\begin{array}{rlllllll} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\ & -4x_1 & -7x_2 & -2x_3' & +2x_3'' & \leq & -10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & & \end{array}$$

4. Enfin, l'équation $7x_1 - 6x_2 = 2$ se ramène aux deux inégalités :

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \leq 2 \\ -7x_1 + 6x_2 \leq -2 \end{cases}$$

Finalement, le PL de forme canonique équivalent au PL de forme générale de l'exemple 1.1 s'écrit :

$$
\begin{array}{lllllll}
\max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & & \\
 & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & \leq & -2 \\
 & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & \leq & 10 \\
 & 7x_1 & -6x_2 & & & \leq & 2 \\
 & -7x_1 & +6x_2 & & & \leq & -2 \\
 & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & &
\end{array}
$$

DÉFINITION 1.2.– Un PL est de forme standard s'il se présente ainsi :

$$
\begin{array}{llllll}
\max z = & c_1 x_1 & \cdots & +c_n x_n & & \\
 & a_{11} x_1 & \cdots & +a_{1n} x_n & = & b_1 \\
 & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1} x_1 & \cdots & +a_{mn} x_n & = & b_m \\
 & x_1 \geq 0 & \cdots & x_n \geq 0 & &
\end{array}
$$

Observons bien que :

- il s'agit ici de maximiser la fonction objectif,
- que toutes les contraintes sont des équations,
- que toutes les variables sont astreintes à la non négativité.

Sous forme condensée, un PL de forme standard s'écrit :

$$
\begin{array}{l}
\max z = \boldsymbol{c}^t \boldsymbol{x} \\
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{1.2}
$$

REMARQUE 1.4.– Les formes canonique et standard peuvent varier selon les auteurs.

PROPOSITION 1.2.– Tout PL peut être mis sous forme standard.

Preuve. Les règles suivantes servent à ramener un PL de forme générale à la forme standard.

1. On transforme toute variable libre comme pour la forme canonique.
2. On transforme une fonction de minimisation comme pour la forme canonique.
3. Une inégalité du type ≤ se ramène à une équation en ajoutant au membre de gauche une variable non négative, appelée variable d'écart, dont la contribution à la fonction objectif est nulle :

$$
a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + u = b_i \\ u \geq 0 \end{cases}
$$

4. Une inégalité du type ≥ se ramène à une équation en retranchant du membre de gauche une variable non négative, appelée également variable d'écart, avec une contribution nulle à la fonction objectif :

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - v = b_i \\ v \geq 0 \end{cases} \blacksquare$$

EXEMPLE 1.3.– Mettons le PL de l'exemple 1.1 sous forme standard :

1. Comme à l'exemple 1.2 pour la forme canonique.
2. Comme à l'exemple 1.2 pour la forme canonique.
3. L'inégalité :

$$5x_2 - 9x_3' + 9x_3'' \leq -2$$

est équivalente à :

$$5x_2 - 9x_3' + 9x_3'' + x_4 = -2 \text{ et } x_4 \geq 0$$

ce qui fait que le PL de l'exemple 1.1 est équivalent à :

$$\begin{array}{llllllll} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & +0x_4 & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & +x_4 & = & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & & \geq & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & x_4 \geq 0 & & \end{array}$$

4. Enfin, l'inégalité :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' \geq 10$$

est équivalente à :

$$4x_1 + 7x_2 + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 10 \text{ et } x_5 \geq 0$$

Finalement, le PL de forme générale proposé à l'exemple 1.1 s'écrit sous forme standard :

$$\begin{array}{lllllllll} \max w = & 3x_1 & -5x_2 & +9x_3' & -9x_3'' & +0x_4 & +0x_5 & & \\ & & 5x_2 & -9x_3' & +9x_3'' & +x_4 & & = & -2 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3' & -2x_3'' & & -x_5 & = & 10 \\ & 7x_1 & -6x_2 & & & & & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3' \geq 0 & x_3'' \geq 0 & x_4 \geq 0 & x_5 \geq 0 & & \end{array}$$

Observons que les variables d'écart n'ont pas de contribution à la fonction objectif car ce ne sont pas des variables naturelles du PL. Elles ne servent qu'à combler l'écart entre les membres de droite et de gauche d'une inégalité. On a alors comme fonction objectif $w = 3x_1 - 5x_2 + 9x_3' - 9x_3''$.