

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Généralités

Qu'est-ce qu'un système dynamique ?

Henri Poincaré, par ses travaux sur la « Mécanique Céleste » à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, est le fondateur de la théorie des systèmes dynamiques. Jean-Christophe Yoccoz (1957-2016) (médaille Fields et Collège de France), dans une conférence grand public prononcée en 2005 à la Bibliothèque nationale de France<sup>1</sup> précise : « Un système dynamique, c'est un espace des phases avec une équation d'évolution ; les points de l'espace des phases décrivent les états possibles du système considéré, l'équation d'évolution gouverne les changements d'états sur le court terme. Le but de la théorie est de comprendre l'évolution sur le long terme. »

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues, généralement dépendantes du temps, et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Toutes les disciplines scientifiques sont concernées par ces équations.

---

<sup>1</sup> « Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré. Le prix en l'honneur des 60 ans du roi Oscar et la découverte des orbites homoclines. » *Lett Mat Int* **1**, 5-10 (2013).

## 1.2 Exemples de systèmes dynamiques

### 1.2.1 Exemples élémentaires

Même si ce n'est pas la discipline qui a fait naître les équations différentielles, les modèles de la dynamique des populations donnent de façon simple des équations qui sont parmi les plus accessibles. Ainsi, l'étude d'une population isolée dans un milieu produisant de la nourriture en abondance conduit au modèle suivant pour l'effectif  $x$  en fonction du temps  $t$  :

$$\dot{x} = Kx, \quad (1.2.1)$$

c'est-à-dire que l'accroissement de population  $\dot{x}(t)$  est, à chaque instant, proportionnel par un facteur constant  $K$  à la taille de la population  $x(t)$ . Les solutions de cette équation font apparaître un phénomène de croissance exponentielle. La seule donnée de la population à un temps initial  $t_0$  suffit à déterminer complètement la dynamique de la population.

**N.B. :** Dans tout cet ouvrage la notation  $\dot{x}$  sera utilisée pour indiquer la dérivée de la variable  $x$  par rapport au temps  $t$ . La notation  $y'(x)$  étant réservée à la dérivée de la variable  $y$  par rapport à toute autre variable  $x$ .  $\square$

À peine plus compliquée est la célèbre équation différentielle modélisant la relation fondamentale de la dynamique de Newton :  $f = m\gamma$ , où  $m$  est la masse d'une particule,  $f$  la force exercée sur celle-ci et  $\gamma$  l'accélération qui en résulte. Dans le cas d'un mouvement rectiligne, si la force subie est fonction de la position (par exemple dans le cas d'un ressort), on obtient une équation de la forme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

On pose  $\dot{x} = y$  et l'équation est transformée en le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x)/m \end{cases} .$$

Cette fois, pour déterminer parfaitement le mouvement, il faut se donner position et vitesse initiales. Cet exemple très élémentaire sera repris au paragraphe suivant.

### 1.2.2 Systèmes dynamiques représentatifs

**(1) Application unimodale.** Soit l'application unimodale  $f_\mu : x \mapsto \mu x(1-x)$  avec  $x \in I = [0, 1]$ . On voit que  $f_\mu(I) \subset I$  si et seulement si  $\mu \in [0, 4]$ .

Cet intervalle  $[0, 4]$  est donc l'intervalle dans lequel on choisit le paramètre. Pour  $\mu < 1$ , l'origine est un point fixe attractant et le bassin d'attraction est l'intervalle  $I$  en entier. Pour  $\mu = 1$ , l'origine devient instable et il bifurque un point fixe stable  $x_\mu = 1 - \frac{1}{\mu}$ . Quand  $\mu$  augmente,  $f'_\mu(x_\mu) = 2 - \mu$  décroît, passe par 0 puis devient négative. Pour  $\mu_1 = 3$ , cette dérivée atteint la valeur  $-1$  et le point fixe  $x_\mu$  passe par une bifurcation de doublement de période — voir l'exemple 6 du paragraphe 5.2 de [61] — : le point  $x_\mu$  devient instable, et une orbite 2-périodique stable  $\gamma_\mu^2$  bifurque (le mot « orbite » est précisé à la définition 5.3.2). Pour une valeur  $\mu_2 > \mu_1$ , cette orbite passe à son tour par une bifurcation de doublement de période :  $\gamma_\mu^2$  devient instable, et il bifurque une orbite 4-périodique stable. Ce phénomène de bifurcation de doublement de période se répète indéfiniment à des valeurs  $\mu_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , formant une suite croissante s'accumulant sur une valeur  $\mu_\infty$ , appelée valeur de *bifurcation de Feigenbaum* (voir figure 1.1). Feigenbaum a montré que cette accumulation de

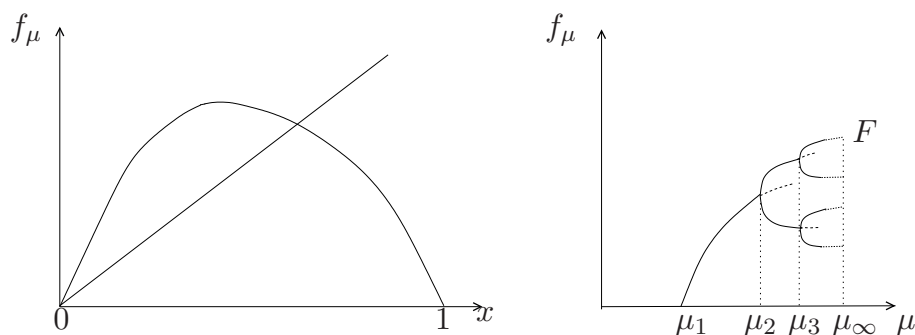


FIG. 1.1 – Figure de gauche :  $f_\mu$  pour un  $\mu > 1$ .

bifurcations s'explique dans le cadre de la *théorie de la renormalisation*. Une conséquence remarquable de cette théorie est que la suite  $(\mu_n)$  est géométrique, c'est-à-dire que  $\mu_\infty - \mu_n \sim C\delta^n$ , avec  $C > 0$  et une constante *universelle*  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ . Cela signifie, que le phénomène d'accumulation des bifurcations de doublement de période existe pour des familles unimodales beaucoup plus générales que la famille quadratique  $f_\mu$ , avec *la même constante*  $\delta$ . Pour la valeur de Feigenbaum  $\mu_\infty$ , l'application  $f_{\mu_\infty}$  possède un attracteur  $K_F$ , dit *attracteur de Feigenbaum*, qui est la limite au sens de Hausdorff des orbites stables.

Pour  $\mu \in ]3, 4]$ , on peut avoir des dynamiques chaotiques plus ou moins compliquées. Ces dynamiques et leurs bifurcations ont fait l'objet d'un très grand nombre d'études qu'il n'est pas question de mentionner dans cet ouvrage. On pourra consulter le livre de Collet et Eckmann [14] pour avoir une idée de l'état du sujet dans les années 1980, le livre de Milnor [49] pour une idée plus récente de l'évolution du sujet dans le domaine complexe : on considère

$x, \mu \in \mathbb{C}$  et l'ensemble de bifurcation est alors l'*ensemble de Mandelbrot*. Cet ensemble a une géométrie fractale, notion introduite par Mandelbrot [45]. Pour une approche plus savante de ces aspects, aussi bien réels que complexes, on pourra consulter le livre de De Melo et Van Strien [19].

Ces travaux sur l'application unimodale ont permis de dégager et d'étudier, dans un cas d'école, des concepts qui jouent un rôle fondamental pour la théorie générale des systèmes dynamiques : attracteurs (hyperboliques, étranges), renormalisation, géométrie fractale, etc.

Le fait essentiel à retenir est que l'évolution décrite par l'équation unimodale peut être chaotique dès que le paramètre  $\mu$  est assez grand. Cette propriété de la dynamique discrète est en contraste avec la situation que l'on observe à propos de l'équation unimodale différentielle :

$$\dot{x} = \mu x(1 - x).$$

Pour toute valeur de  $\mu > 0$ , le flot de l'équation différentielle a un seul point singulier attracteur qui est le point  $x = 1$ . Le bassin d'attraction de ce point est l'axe  $\mathbb{R}^+$  en entier (l'origine est un point singulier instable).

## (2) Loi d'attraction universelle de Newton.

Cette loi décrit le champ de gravité classique, tel qu'il a été introduit par Newton. Supposons que le système considéré soit formé de  $n$  points matériels :  $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^3$ , de masse :  $m_1, \dots, m_n$  respectivement. La loi de Newton est une équation différentielle du second ordre dérivant d'un potentiel particulier. Rappelons qu'une équation différentielle du second ordre, sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^N$ , dérive du potentiel  $V$ , si  $V$  est une fonction différentiable sur  $U$  et si l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla V(x).$$

Ici,  $x$  est la variable dans  $U$  et  $\nabla V$  est le gradient de  $V$ . Dans le cas de la loi de Newton,  $x = (X_1, \dots, X_n)$ , et l'ouvert de définition est  $U = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^{3n} \mid X_i \neq X_j \text{ pour } i \neq j\}$  (on écarte les chocs). Le potentiel introduit par Newton s'écrit :

$$V(X_1, \dots, X_n) = G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{\|X_i - X_j\|},$$

où  $G$  est la constante d'attraction universelle. L'équation de Newton prend la forme :

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = -\frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial X_i}(x), \quad i = 1, \dots, n,$$

où  $\frac{\partial V}{\partial X_i}(x)$  est le vecteur de  $\mathbb{R}^3$  formé des dérivées partielles selon les trois coordonnées de  $X_i$ , c'est-à-dire le vecteur projection de  $\nabla V(x)$  sur l'espace de

ces trois coordonnées. Ici, le gradient  $\nabla V(x)$  est relatif à la norme  $\|X\|$  de  $\mathbb{R}^{3n}$  définie par  $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n m_i \|X_i\|^2$ , où  $\|X_i\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .

Comme cela sera vu au paragraphe 5.1, on étudie une équation différentielle d'ordre 2, définie sur  $U \subset \mathbb{R}^N$ , en passant dans l'espace  $U \times \mathbb{R}^N$  des positions-vitesses  $(x, y)$ . Dans le cas d'une équation dérivant du potentiel  $V$ , le système d'ordre un dans l'espace  $U \times \mathbb{R}^N$  prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\nabla V(x) \end{cases} .$$

La principale propriété d'une telle équation est que la fonction

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + V(x)$$

est constante pour chaque trajectoire. Dans le cas de l'équation de Newton, ce résultat est le théorème de l'énergie cinétique. On doit pondérer le produit scalaire par les masses, et la fonction d'énergie totale  $E$  est la somme du potentiel  $V$  et de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \sum_i m_i \langle Y_i, Y_i \rangle$  avec  $Y_i = \dot{X}_i$ , la vitesse de  $X_i$ . Le mouvement à partir de la condition initiale  $(x_0, y_0)$  a donc lieu sur la surface d'énergie constante :  $\{E(x, y) = E(x_0, y_0)\}$ .

Nous n'en dirons pas plus sur cet exemple qui est assurément le plus ancien et le plus fameux exemple de système différentiel. Rappelons seulement que les propriétés de ce système deviennent beaucoup plus claires dans le cadre du *formalisme hamiltonien*, où l'espace des positions-vitesses est remplacé par l'espace des positions-impulsions, espace de phase traditionnel de la mécanique. Dans ce formalisme, on peut facilement montrer que l'équation, dans l'espace de phase, a d'autres invariants que l'énergie (qui, dans le formalisme hamiltonien, devient la fonction de Hamilton). En particulier, son flot laisse invariant un volume de l'espace de phase (théorème de Liouville). On trouvera une introduction à l'étude de ces questions, par exemple, dans le livre de Arnold [3].

**(3) Billard sur des domaines convexes de  $\mathbb{R}^2$ .** On considère une partie  $B$  compacte connexe de  $\mathbb{R}^2$  bordée par une courbe convexe lisse : c'est notre table de billard. On suppose que l'on a une boule (réduite à un point matériel) qui glisse sans frottement sur  $B$ , et subit des chocs élastiques quand elle atteint le bord  $\partial B$ . On étudie le mouvement de la boule en considérant ses passages par  $\partial B$ .

Précisément, on considère les mouvements qui ne passent que par des chocs transversaux avec  $\partial B$ . Ces mouvements sont complètement décrits par la dynamique dite *dynamique du billard*. Cette dynamique est définie sur l'anneau ouvert  $A = \partial B \times ]0, \pi[$ . À chaque  $(u, \theta) \in A$  on associe le vecteur unitaire  $p_\theta$

au point  $u \in \partial B$ , faisant un angle  $\theta$  avec le vecteur tangent à  $\partial B$  (on a choisi une orientation de  $\partial B$ ). On lance la boule en  $u$  dans la direction orientée  $p_\theta$ . Elle arrive alors en un point  $u_1 \in \partial B$  et rebondit dans la direction  $p_{\theta_1}$ . La dynamique du billard est l'application  $f_B : (u, \theta) \rightarrow (u_1, \theta_1)$  (voir figure 1.2)

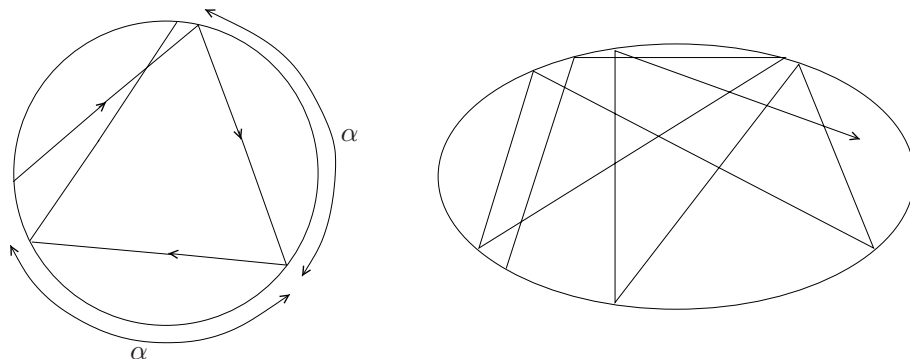


FIG. 1.2 – Figure de gauche : billard sur un disque (rotation). Figure de droite : billard elliptique (mouvement chaotique).

Si le bord  $\partial B$  est strictement convexe, l'application  $f_B$  est bien définie sur  $A$ . C'est un difféomorphisme de  $A$  qui préserve l'aire  $du \wedge d\theta$ . Dans le cas où  $B$  est un disque, il est trivial de vérifier que  $f_B$  laisse invariant chaque cercle  $\partial B \times \{\theta\}$ , et que  $f_B$  est une rotation sur chacun de ces cercles (on dit que la dynamique est intégrable). Si on remplace le cercle  $\partial B$  par une ellipse, la dynamique est beaucoup plus compliquée. En fait, on a la situation générale d'une dynamique symplectique de l'anneau (symplectique est ici synonyme de « préservant l'aire »), avec un ensemble de Cantor de courbes simples invariantes, données par la théorie KAM, séparant des anneaux contenant des dynamiques chaotiques. Si  $\partial B$  est un polyèdre convexe, la dynamique est liée de façon très subtile aux propriétés arithmétiques des angles entre les côtés de  $\partial B$ . On trouvera des informations sur la dynamique du billard dans [70].

#### (4) Pendule avec ou sans frottement.

$$\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad k \geq 0.$$

Dans l'espace de phase de coordonnées  $(x = \theta, y = \dot{\theta}) \in S^1 \times \mathbb{R}$ , on obtient l'équation d'un champ de vecteur de dimension 2 :

$$X_k : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x - ky \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Pour  $k = 0$ , on a un pendule sans frottement. Le système dérive du potentiel  $V(x) = \omega^2(1 - \cos x)$  (on a normalisé ce potentiel de façon que  $V(0) = 0$ ). Le

potentiel  $V$  étant périodique de période  $2\pi$ , on considère que l'équation (1.2.2) est définie sur le cylindre ou anneau  $S^1 \times \mathbb{R}$ , où  $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ . Autrement dit, on identifie les points  $(x, y)$  et  $(x + 2\pi, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , car deux valeurs de  $x$  qui diffèrent d'un multiple de  $2\pi$  représentent la même position du pendule. Comme on l'a dit dans l'exemple 2, le champ  $X_0$  laisse donc invariante la fonction  $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \omega^2 \cos x$ , et les orbites de ce champ sont contenues dans les lignes de niveaux de  $H$ . On en déduit immédiatement le portrait de phase de  $X_0$  représenté dans la figure 1.3 (a). La définition 5.3.3 précisera la notion de portrait de phase. Ici, par portrait de phase on entend la structure spatiale des lignes de courant du système. On a un centre en  $(0, 0)$  entouré par des orbites périodiques remplissant un anneau pincé

$$A = \{H(x, y) \leq 1 + \omega^2\},$$

dont le bord contient le point de selle  $(\pi, 0) \sim (-\pi, 0)$  (rappelons que l'on considère  $A$  dans l'anneau défini par  $(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}$ ). Ces orbites correspondent à des oscillations du pendule. L'extérieur de  $A$  est un anneau rempli d'orbites périodiques d'énergie supérieure à  $1 + \omega^2$ . Ces orbites font des tours entiers. Le bord de  $A$  sépare ces deux régimes.

Si  $k > 0$ , le terme  $ky$  représente un frottement opposé au mouvement et proportionnel à la vitesse. On a toujours deux points singuliers : un foyer stable en  $(0, 0)$  et le point  $(\pi, 0)$  qui reste un point de selle. On montre que :  $X_k \cdot H(x, y) = -ky^2$ . On en déduit par le lemme 4.1.1 que la fonction  $H$  décroît donc strictement le long de chaque orbite différente des deux points singuliers  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$ . Admettons ici les notions de variétés stable ou instable qui seront introduites au paragraphe 6.5. Il est alors facile de justifier le portrait de phase représenté dans la figure 1.3 (b). On a quatre orbites régulières exceptionnelles : les séparatrices du point  $(\pi, 0)$ . Deux forment la variété instable  $W_k^u$  et tendent vers  $(0, 0)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . Les deux autres forment la variété stable  $W_k^s$  et tendent vers  $(\pi, 0)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . Toutes les autres orbites régulières tendent vers le foyer  $(0, 0)$ .

Voici une remarque sur la difficulté d'obtenir des résultats quantitatifs, et pas seulement qualitatifs, sur le comportement d'un système dynamique, même sur un système très simple comme celui-ci. Si on lance le pendule, disons à partir de  $x_0 = 0$ , avec une grande vitesse  $y_0 > 0$ , le pendule va faire un certain nombre  $N_k(y_0)$  de tours avant d'entrer dans un régime d'oscillations (de plus en plus amorties). Ce nombre  $N_k(y_0)$  dépend de la position du point  $(0, y_0)$  par rapport aux intersections de la variété stable  $W_k^s$  avec l'axe  $Oy_+$ . Cette variété  $W_k^s$  est analytique, mais ne peut pas être calculée par un algorithme algébrique. En ce sens, trouver le nombre de tours  $N_k(y_0)$ , en fonction de la vitesse initiale  $y_0$ , est un problème « indécidable ».

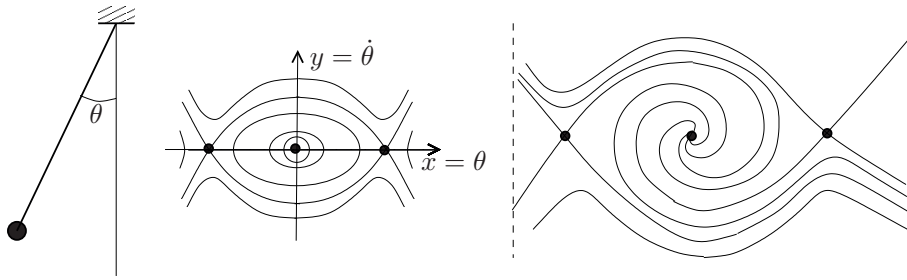


FIG. 1.3 – Figure de gauche : le pendule. Figure du centre : portrait de phase pour  $k = 0$ . Figure de droite : portrait de phase pour  $k > 0$ .

**(5) Compétition d'espèces.** On considère deux espèces en compétition (par exemple pour des ressources) dans un même milieu. Les variables  $x, y$  représentent les quantités de chaque espèce. Évidemment, on doit se restreindre au premier quadrant  $Q = \{x \geq 0, y \geq 0\}$ . Pour modéliser l'évolution, Volterra a introduit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta x(1 - ax - by) \\ \dot{y} = y(1 - a'x - b'y) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Tous les paramètres sont positifs. Le paramètre  $\delta$  mesure la vitalité relative des espèces. Pour  $b = a' = 0$ , on a des évolutions indépendantes, chacune des espèces étant régie par une équation différentielle logistique. Les coefficients  $b, a'$  sont des termes de couplage, qui ont pour signification que chaque espèce a une influence négative sur l'autre. On suppose que les paramètres sont choisis génériquement — voir chapitre 13.

On suppose par exemple la condition générique  $\Delta = ab' - ba' \neq 0$  (dans le cas contraire, on aurait une droite de points singuliers). Sous cette condition, le système (1.2.3) admet 4 points singuliers :

1. L'origine  $A = (0, 0)$  est un point hyperbolique singulier instable (de valeurs propres 1 et  $\delta$ ).
2. Les deux points  $B = (\frac{1}{a}, 0)$  et  $C = (0, \frac{1}{b'})$  sont stables en restriction aux axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement.
3. Le point  $D = (\frac{b'-b}{\Delta}, \frac{a-a'}{\Delta})$ . Pour que ce point soit localisé dans  $Q$ , il est nécessaire que ses deux coordonnées soient positives. Cette condition définit un ouvert de l'espace des paramètres.

Il est clair que si  $(x, y) \in Q$  a une norme assez grande, le produit scalaire du champ  $X(x, y)$ , défini par (1.2.3), avec le champ radial  $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ , est strictement négatif. Il en résulte que toutes les trajectoires entrent dans une région triangulaire  $Q_\rho = \{(x, y) \in Q \mid x + y \leq \rho\}$ . On dit que  $Q_\rho$  est un ensemble absorbant.