

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Généralités	1
1.2	Exemples de systèmes dynamiques	2
1.2.1	Exemples élémentaires	2
1.2.2	Systèmes dynamiques représentatifs	2
1.2.3	Modélisation et remarques générales sur le calcul des solutions	10
1.3	Processus d'évolution et déterminisme	11
1.4	Notions fondamentales pour l'étude des systèmes dynamiques	12
1.5	Phénomènes de bifurcation	13
1.6	Analyse qualitative	13
2	Éléments de calcul différentiel	17
2.1	Introduction	17
2.2	Espace affine. Approche usuelle de la notion de vecteurs	17
2.3	Différentielle d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n	19
2.3.1	Définitions	19
2.3.2	Expressions de la différentielle	23
2.3.3	Composition des différentielles	24
2.4	Formule des accroissements finis	25
2.5	Dérivées partielles d'ordre supérieur	25
2.5.1	Dérivées partielles d'ordre deux	25
2.5.2	Dérivées partielles d'ordre supérieur à deux	28
2.6	Formule de Taylor	29
2.7	Théorème de l'inverse, difféomorphisme	32
2.8	Théorème des fonctions implicites	36
3	Variétés topologiques et différentiables	41
3.1	Définitions et exemples	41
3.2	Difféomorphisme entre variétés	46

3.3	Codimension. Sous-espaces vectoriels transverses	47
3.4	Sous-variété d'un ouvert de \mathbb{R}^n	49
3.4.1	La sphère unité S^2 est une sous-variété de \mathbb{R}^3	51
3.4.2	Espace tangent en un point d'une sous-variété d'un ouvert de \mathbb{R}^n	52
3.5	Sous-variété de variété	53
3.6	Distance sur une variété	53
4	Champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n	57
4.1	Définition d'un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n	57
4.1.1	Image d'un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n par un difféomorphisme	59
4.1.2	Équation différentielle d'un champ de vecteurs sur un ouvert de \mathbb{R}^n	61
4.2	Espace fibrés, fibrations, fibrés différentiables	62
4.2.1	Espace fibré	62
4.2.2	Fibrations, fibrés différentiables	64
4.3	Germe	67
4.4	Différentielle entre variétés	71
4.5	Espace tangent en un point d'une variété	72
4.6	Champ de vecteurs sur une variété	76
4.6.1	Image d'un champ de vecteurs défini sur une variété	79
4.7	Structure de variété du fibré tangent	80
4.8	Rang, immersion, submersion, plongement	83
5	Propriétés générales des trajectoires	87
5.1	Équations différentielles générales	87
5.1.1	Conditions initiales, existence et unicité de la solution	89
5.2	Théorème local d'existence et d'unicité	89
5.2.1	Le principe du point fixe	89
5.2.2	Existence et unicité locales des trajectoires	91
5.2.3	Exemples de non-unicité	96
5.3	Flot d'un champ de vecteurs	96
5.3.1	Trajectoire maximale	96
5.3.2	Propriétés différentiables du flot	99
5.3.3	Groupe à 1-paramètre	100
5.4	Exemple de flot non complet, durée de vie	101
5.5	Équivalence à des champs à flot complet	103
5.6	Existence et unicité des solutions des champs définis sur une variété	106
5.7	Les champs linéaires $\dot{x} = Ax$	107

5.7.1	Matrice fondamentale principale	107
5.7.2	Étude des systèmes planaires linéaires	108
5.8	Isoclines	111
5.8.1	Définitions	111
5.8.2	Exemple d'un système planaire non linéaire	111
6	Analyse qualitative des trajectoires	113
6.1	Type topologique de trajectoire	113
6.2	Section locale	116
6.3	Théorème du voisinage tubulaire	118
6.4	Ensembles α -limite et ω -limite	121
6.5	Variétés invariantes locales pour les difféomorphismes et les champs de vecteurs	122
6.6	Propriétés des ensembles limites	123
6.7	Orbites récurrentes	127
6.8	Récurrence pour les champs de la sphère	129
6.8.1	Théorème de Jordan	129
6.8.2	Théorème de Poincaré-Bendixson	130
6.8.3	Applications du théorème de Poincaré-Bendixson	131
7	Stabilité des points singuliers	135
7.1	Stabilité d'un point singulier d'un champ	136
7.1.1	Point fixe hyperbolique. Théorème Hartman-Grobman	138
7.1.2	Champs et difféomorphismes linéaires hyperboliques	139
7.1.3	Existence de variétés invariantes locales pour les difféo- morphisme	139
7.1.4	Existence de variétés invariantes locales pour les champs de vecteurs	140
7.2	Différents types de stabilité	141
7.3	Stabilité points fixes des systèmes linéaires planaires	145
7.4	Théorèmes de stabilité	147
7.4.1	Fonction de Lyapounov	147
7.4.2	Un critère de stabilité	150
7.5	Application aux systèmes planaires non linéaires	156
7.6	Exemple non linéaire	157
8	Orbites et champs périodiques	161
8.1	Orbites périodiques	162
8.2	Application de Poincaré	165
8.3	Utilité de l'application de Poincaré	169
8.4	Section globale, suspension	171

8.4.1	Section globale pour un champ de vecteurs	171
8.4.2	Suspension d'un difféomorphisme	172
8.5	Champ de vecteurs périodiques	178
9	Stabilité des orbites périodiques	185
9.1	Types de stabilité d'une orbite périodique	185
9.2	Différents types de stabilité pour un point fixe de difféomorphisme	192
9.3	Orbite périodique et application de Poincaré	193
9.4	Théorèmes de stabilité	195
9.4.1	Fonction de Lyapounov pour un difféomorphisme	195
9.5	Multiplicateurs de Floquet	196
9.5.1	Exemple d'application	198
10	Caractérisation des phénomènes non linéaires	201
10.1	Exemples de type α)	202
10.1.1	Exemple en dimension un	202
10.1.2	Exemple en dimension deux	203
10.2	Introduction aux bifurcations élémentaires	209
10.2.1	Caractérisation des points limites et de bifurcation	211
10.2.2	Exemples de détermination de solutions stationnaires	213
10.3	Équations de type β)	214
10.4	Calculs explicites dynamiques de populations	215
10.4.1	Taux de reproduction constant et linéaire	215
10.4.2	Taux de reproduction linéaire couplé	216
10.4.3	Taux de reproduction quadratique	219
10.4.4	Analyse des solutions de (10.4.9)	226
10.4.5	Deux espèces en compétition dans un même milieu	232
11	Bifurcations de solutions stationnaires	235
11.1	Bifurcations élémentaires de base, champs de \mathbb{R}	235
11.1.1	Bifurcation de col ou selle-nœud	235
11.1.2	Bifurcation transcritique	240
11.1.3	Points de bifurcation fourche	240
11.2	Champs de \mathbb{R}^2	244
11.2.1	Un système paléoclimatique oscillatoire	244
11.2.2	Exemples de bifurcations multiples en sciences de la planète : hystérésis	247
11.2.3	Bifurcation selle-nœud (saddle-node)	248

12 Bifurcations de Hopf	251
12.1 Exemples	251
12.2 Caractérisation de la bifurcation de Hopf	255
12.3 Bifurcation de Hopf par les formes normales	257
12.3.1 Forme normale de la bifurcation de Hopf sur-critique	257
12.3.2 Forme normale de la bifurcation de Hopf sous-critique	259
12.4 Compléments bifurcations de Hopf	259
12.5 Bistabilité des solutions périodiques	263
12.6 Phénomène de l'explosion	267
13 Généricité	271
13.1 Introduction	271
13.2 Définitions et approche heuristique	273
13.3 Quelques résultats d'analyse fonctionnelle	278
13.4 La notion de généricité	279
13.5 Déploiement, équivalence de deux familles sur \mathbb{R}^k	281
13.5.1 Exemples	285
13.6 Théorèmes de préparation	288
13.6.1 Théorème de préparation de Weierstrass	288
13.6.2 Théorème de préparation de Malgrange	292
13.7 Conjugaison et équivalence de deux champs sur une variété	296
13.7.1 Conjugaison de deux champs sur une variété	296
13.7.2 Équivalence de deux champs sur une variété	296
13.8 Déploiement, équivalence, sur une variété	297
13.9 Déploiements versels pour les singularités	298
13.9.1 Déploiements versels	298
13.9.2 Codimension d'une singularité	303
13.10 Déploiements de type selle-nœud sur \mathbb{R}	303
13.11 k -jet d'une fonction	305
13.11.1 Cas euclidien	305
13.11.2 Formulation générale : cas des variétés	306
13.12 Déploiements des bifurcations de Hopf-Takens	307
14 Méthodes de continuation	309
14.1 Phénoménologie	310
14.1.1 Zoologie des aléas numériques	311
14.1.2 L'art et la science des études paramétriques	315
14.2 Principes des méthodes de continuation	316
14.2.1 Introduction	316
14.3 Prédicteurs	318
14.3.1 Méthodes de la classe i) : prédiction par la tangente	318

14.3.2	Méthodes de la classe ii)	320
14.4	Paramétrisations	321
14.4.1	Paramétrisation par l'addition d'une équation	322
14.4.2	Paramétrisation locale	322
14.4.3	Paramétrisation par la norme	324
14.4.4	Abscisse curviligne et pseudo-abscisse curviligne	324
14.5	Correcteurs	326
14.5.1	Généralités	326
14.5.2	Paramétrisation du correcteur : cas du paramètre naturel λ à pas constant. Problème de Bratu	328
14.5.3	Paramétrisation générale du correcteur	332
14.6	Contrôle du pas	333
14.7	Cas des équations non autonomes	334
15	Théorie des méthodes de continuation	335
15.1	Solution régulière	336
15.2	Points limites simples (ou plis)	337
15.3	Continuation par la norme	338
15.3.1	Le lemme du « bordering » (critère de non singularité) de H.B. Keller	340
15.4	Continuation par la pseudo-abscisse curviligne	342
15.5	L'algorithme du bord	345
15.5.1	Application du cas (a) du « Bordering lemma »	345
15.5.2	Application du cas (b) du « Bordering lemma »	346
15.6	Bifurcation et branchement	349
15.6.1	L'équation algébrique de bifurcation (EAB)	349
15.6.2	Calcul pratique de la direction de bifurcation	351
15.6.3	Mise en œuvre pratique du calcul du branchement	351
15.6.4	Détection des points de bifurcation	352
15.7	Les points limites et leur continuation	354
15.7.1	Continuation des points limites	355
15.7.2	Continuation par la pseudo-abscisse curviligne	356
15.7.3	Existence et calcul de la solution itérée	358
15.8	Continuation de solutions périodiques	361
15.8.1	Caractérisation du point de départ de la continuation	361
15.8.2	Procédure de continuation	362
15.8.3	Procédure de démarrage au point de Hopf	364
15.9	Persistence des solutions périodiques	365
15.10	Continuation des points de bifurcation de Hopf	367
15.10.1	Le système étendu : formulation complexe	369

16 Bifurcations en biochimie	373
16.1 Un modèle d'enzyme à deux compartiments	373
16.1.1 Étude du comportement stationnaire	374
16.1.2 Perturbation du système (16.1.5)	377
16.2 Modèle activateur-inhibiteur	380
16.2.1 Système non perturbé à un seul paramètre de bifurcation	380
16.2.2 Système perturbé	382
17 Applications à l'écologie	387
17.1 Dynamiques d'une seule population	387
17.1.1 Modèle de croissance exponentielle	387
17.1.2 Équation de la logistique	388
17.1.3 Modèle de Gompertz	392
17.1.4 Loi de croissance générale	395
17.2 Deux populations en interaction	395
17.3 Modèles proie-prédateur	396
17.3.1 Modèle de Lotka-Volterra	396
17.3.2 Modèle de Holling	408
17.3.3 Commentaires, extensions des modèles proie-prédateur .	413
17.4 Modèle de compétition interspécifique	414
17.5 Modèle de mutualisme interspécifique	419
17.6 Modèle de Lotka-Leslie	423
17.6.1 Convergence du modèle de Lotka-Leslie	425
Bibliographie	433
Index	439