

Table des matières

1	La récurrence	1
1.1	Le principe de récurrence	2
1.2	Le raisonnement par récurrence	3
1.3	Réurrences fortes	6
1.4	Exercices corrigés	10
2	Combinatoire-Dénombrement	39
2.1	Le principe additif	40
2.2	Produit cartésien	43
2.2.1	Produit cartésien de deux ensembles	43
2.2.2	Produit cartésien de plusieurs ensembles	45
2.2.3	Définition de A^n	46
2.3	Le principe multiplicatif	47
2.3.1	Un exemple introductif	47
2.3.2	Cardinal d'un produit cartésien	47
2.4	Listes avec répétitions	50
2.5	Listes sans répétition	51
2.6	Permutations	53
2.7	Combinaisons	55
2.7.1	Coefficients binomiaux	55
2.7.2	Propriétés des coefficients binomiaux	59
2.7.3	Triangle de Pascal	60
2.8	Binôme de Newton	61
2.9	Exercices corrigés	64
2.9.1	Principes additif-multiplicatif	64
2.9.2	Combinaisons-coefficients binomiaux	79
2.9.3	Binôme de Newton	87

3	Suites	91
3.1	Suites convergentes	92
3.1.1	Un exemple introductif	92
3.1.2	Définitions d'une suite convergente	94
3.1.3	Unicité - Opérations sur les limites	96
3.1.4	Suites convergentes et inégalités	99
3.2	Suites divergentes vers l'infini	103
3.2.1	Un exemple introductif	103
3.2.2	Les définitions	104
3.2.3	Opérations sur les suites de limite finie ou infinie	105
3.2.4	Limites infinies et inégalités	108
3.3	Limite d'une suite géométrique	110
3.3.1	Limite de q^n	110
3.3.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	112
3.4	Limite et monotonie	114
3.4.1	Compléments sur l'ordre dans \mathbb{R}	114
3.4.2	Suite croissante majorée-décroissante minorée	115
3.4.3	Limite infinie et monotonie	117
3.5	Suites adjacentes	118
3.6	Exercices corrigés	122
3.6.1	Convergence - Divergence	122
3.6.2	Suites adjacentes	165
4	Limite d'une fonction	189
4.1	Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$	190
4.1.1	Les définitions	190
4.1.2	Asymptote horizontale	193
4.1.3	Limite finie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	195
4.2	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$	198
4.2.1	Les définitions	198
4.2.2	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$ et inégalités	201
4.2.3	Limite de la fonction exp en $+\infty$, en $-\infty$	204
4.2.4	Asymptote oblique	205
4.3	Limite infinie en un point	207
4.3.1	Les définitions	207
4.3.2	Asymptote verticale	211

4.4	Opérations sur les limites	212
4.4.1	Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient	213
4.4.2	Limite de la composée de deux fonctions	217
4.5	Limite de la composée d'une suite par une fonction	220
4.6	Formes indéterminées exponentielles	223
4.6.1	Limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$	223
4.6.2	Limite de $x \mapsto xe^x$ en $-\infty$	226
4.6.3	Limite de $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$, en 0	227
4.7	Exercices corrigés	229
4.7.1	Formes indéterminées	229
4.7.2	Asymptotes	234
4.7.3	Fonction exp et croissances comparées	245
4.7.4	Limite et fonction partie entière	249
4.7.5	Complément : fonction périodique et limite en l'infini	257
5	Continuité	259
5.1	Continuité d'une fonction en un point	260
5.1.1	Définitions	260
5.1.2	Exemples et contre-exemples	261
5.1.3	Continuité et dérivabilité en un point	263
5.1.4	Opérations sur les fonctions continues en un point	264
5.1.5	Composée d'une suite par une fonction continue en un point	265
5.1.6	Suite récurrente et fonction continue en un point	266
5.2	Continuité sur un intervalle	269
5.2.1	Définitions	269
5.2.2	Propriétés des valeurs intermédiaires	272
5.2.3	Action d'une fonction continue sur un intervalle	281
5.2.4	Continuité et monotonie stricte sur un intervalle	283
5.2.5	Fonction racine $n^{\text{ième}}$	287
5.3	Exercices corrigés	290
5.3.1	Continuité en point	290
5.3.2	Continuité sur un intervalle	306
5.3.3	Continuité et suite récurrente	312
5.3.4	Exercices sur la fonction racine $n^{\text{ième}}$	332

6	Dérivation : compléments	339
6.1	Dérivée de la composée de deux fonctions	340
6.1.1	Le cas général	340
6.1.2	Une généralisation de la dérivée de u^p	342
6.2	Dérivée seconde - Dérivée n -ième	345
6.3	Fonction convexe	349
6.3.1	Définition - Caractérisations	349
6.3.2	Dérivée et convexité	353
6.3.3	Point d'inflexion	357
6.4	Compléments : Rolle et accroissements finis	358
6.4.1	Dérivée et extremum	358
6.4.2	Théorème de Rolle	359
6.4.3	Théorème des accroissements finis	361
6.4.4	Dérivée et sens de variations	363
6.5	Exercices corrigés	366
6.5.1	Dérivabilité en un point - Composition	366
6.5.2	Dérivée n -ième	379
6.5.3	Fonctions convexes	389
6.5.4	Méthodes de la sécante - de Newton	396
6.5.5	Accroissements finis	407
7	Fonction logarithme népérien	421
7.1	Définition - Premières propriétés	422
7.1.1	Notion de fonction réciproque	422
7.1.2	Définition de la fonction logarithme népérien	423
7.1.3	Premières propriétés	424
7.2	Dérivée et variations de \ln	425
7.2.1	Dérivée de $x \mapsto \ln x$	425
7.2.2	Variations de \ln	427
7.2.3	Dérivées de $x \mapsto \ln(ax + b)$, de $x \mapsto \ln(u(x))$	429
7.3	Propriétés algébriques de la fonction \ln	431
7.3.1	Action de \ln sur la multiplication	431
7.3.2	Action de \ln sur une puissance	432
7.4	Représentation graphique de la fonction \ln	434
7.4.1	Limites en $+\infty$, en 0	434
7.4.2	Représentation graphique	437

7.5	Formes indéterminées logarithmiques	438
7.5.1	Limite de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$	438
7.5.2	Limite de $x \mapsto x \ln x$ en 0 à droite	440
7.5.3	Limite de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ en 0	443
7.6	Fonction logarithme décimal	445
7.7	Fonctions exponentielles de bases a	446
7.8	Exercices corrigés	451
7.8.1	Sur la fonction ln	451
7.8.2	Suites et fonction ln	469
7.8.3	Autres fonctions logarithmes	490
8	Fonctions trigonométriques	501
8.1	Exercices corrigés	502
9	Primitives - Équations différentielles	509
9.1	Fonctions primitives	510
9.1.1	Définition - Existence	510
9.1.2	Propriétés	511
9.1.3	Tableau des primitives des fonctions usuelles	514
9.1.4	Primitives et composition	515
9.2	Équation différentielle linéaire du 1 ^{er} ordre	518
9.2.1	Équation $y' = ay$ telle que $y(0) = 1$	518
9.2.2	Équation $y' = ay$	519
9.3	Équation différentielle affine du 1 ^{er} ordre	523
9.3.1	Résolution de $y' = ay + b$	523
9.3.2	Résolution de $y' = ay + b$ avec une condition initiale	524
9.4	Exercices corrigés	526
9.4.1	Calculs de primitives	526
9.4.2	Méthode d'Euler et primitives	535
9.4.3	Équations du 1 ^{er} ordre	539
9.4.4	Deux exemples d'équations du 2 ^e ordre	552
10	Intégration	561
10.1	Définition - Exemples	562
10.1.1	Définition	562
10.1.2	Exemples	563

10.2	Primitives et intégrale	568
10.2.1	Dérivée de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$	568
10.2.2	Calcul d'une intégrale	572
10.3	Propriétés algébriques de l'intégrale	575
10.3.1	Linéarité de l'intégrale	575
10.3.2	Relation de Chasles	577
10.4	Intégrale et inégalités	579
10.4.1	Positivité	579
10.4.2	Comparaison de deux intégrales	580
10.4.3	Valeur moyenne	583
10.5	Méthode des rectangles	586
10.5.1	Encadrement d'une intégrale	586
10.5.2	Algorithme de la méthode des rectangles	590
10.6	Intégration par partie	591
10.6.1	Introduction	591
10.6.2	La formule d'intégration par parties	592
10.7	Aires entre deux courbes	595
10.8	Exercices corrigés	601
10.8.1	Calculs d'intégrales	601
10.8.2	Fonction définie par une intégrale	614
10.8.3	Intégrales et inégalités	622
10.8.4	Suites et intégrales	634
10.8.5	Suites et intégration par parties	651
10.8.6	Calculs approchés d'une intégrale	662

11 Calcul Vectoriel dans l'espace 671

11.1	Vecteur de l'espace - Définitions - Opérations	672
11.1.1	Vecteur de l'espace	672
11.1.2	Addition vectorielle	675
11.1.3	Multiplication d'un réel par un vecteur	677
11.1.4	Colinéarité de deux vecteurs de l'espace	679
11.1.5	Droites de l'espace	680
11.2	Plans de l'espace - Vecteurs coplanaires	681
11.2.1	Plans de l'espace	681
11.2.2	Vecteurs coplanaires - Non coplanaires	683
11.3	Repérage dans l'espace	687

11.3.1	Bases - Repères de l'espace	687
11.3.2	Coordonnées d'un point - d'un vecteur	688
11.3.3	Calculs sur coordonnées	690
11.4	Barycentres de l'espace ou du plan	693
11.4.1	Barycentres de deux points	693
11.4.2	Barycentre de trois points	698
11.4.3	Barycentre partiel	702
11.5	Exercices Corrigés	705
11.5.1	Calculs dans l'espace vectoriel $(\vec{\mathcal{E}}, +, \cdot)$	705
11.5.2	Alignement - Coplanarité	708
11.5.3	Barycentres	714
12	Produit scalaire dans l'espace	733
12.1	Définition du produit scalaire dans l'espace	734
12.1.1	Expression analytique du produit scalaire	737
12.1.2	Bilinéarité du produit scalaire	739
12.1.3	Identités remarquables et produit scalaire	740
12.1.4	Produit scalaire et vecteurs colinéaires	741
12.2	Orthogonalité dans l'espace	741
12.2.1	Vecteurs orthogonaux	741
12.2.2	Orthogonalité de deux droites de l'espace	742
12.2.3	Orthogonalité d'une droite et d'un plan	743
12.2.4	Vecteur normal à un plan	746
12.3	Projeté orthogonal dans l'espace	749
12.3.1	Projeté orthogonal sur une droite	749
12.3.2	Projeté orthogonal sur un plan.	752
12.4	Exercices corrigés	755
12.4.1	Orthogonalité	755
12.4.2	Fonction scalaire de Leibniz	782
13	Géométrie analytique dans l'espace	791
13.1	Droite de l'espace	792
13.1.1	Représentations paramétriques d'une droite	792
13.1.2	Position relative de deux droites de l'espace	793
13.2	Plan dans l'espace	794
13.2.1	Représentations paramétriques d'un plan	794

13.2.2	Équation cartésienne d'un plan	796
13.2.3	Intersection d'une droite et d'un plan	798
13.2.4	Intersection de deux plans	799
13.2.5	Plans perpendiculaires	800
13.2.6	Distance d'un point à un plan	802
13.3	Sphère de l'espace	803
13.3.1	Équation cartésienne	803
13.3.2	Sphère et produit scalaire	805
13.3.3	Position relative d'une sphère et d'un plan	807
13.3.4	Position relative d'une sphère et d'une droite	810
13.4	Exercices corrigés	812
13.4.1	Droites de l'espace	812
13.4.2	Plans de l'espace	819
13.4.3	Sphère	833
14	Probabilités	843
14.1	Épreuves successives indépendantes	844
14.1.1	Cas de deux épreuves successives	844
14.1.2	Cas de n épreuves successives	845
14.2	Schéma de Bernoulli	846
14.2.1	Loi de Bernoulli	846
14.2.2	Loi binomiale	848
14.3	Opérations sur les variables aléatoires	853
14.3.1	Linéarité de l'espérance	853
14.3.2	Action de l'espérance sur une fonction affine	855
14.3.3	Action de la variance sur une fonction affine	856
14.3.4	Notion de variables aléatoires indépendantes	857
14.3.5	Échantillon de variables aléatoires	858
14.4	Loi des grands nombres	860
14.4.1	Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	860
14.4.2	Inégalité de concentration : loi des grands nombres	863
14.4.3	Loi des grands nombres et schéma de Bernoulli	865
14.5	Exercices corrigés	866
14.5.1	Loi Binomiale	866
14.5.2	Variables indépendantes	882
14.5.3	Les inégalités	887