1 RAPPELS ET PRÉREQUIS

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 : ....

....

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? ....

3. On admet que $u_n \neq 0$ pour tout entier naturel n. On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier n.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1} : ....

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n : ....

c. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : ....

d. Déduire la nature de (v_n) : ....

e. Exprimer v_n en fonction de n : ....

f. Déduire u_n en fonction de n : ....

Exercice 2

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$;
- (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 2$;
- $w_n = u_n + v_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2 :

2. Exprimer u_n en fonction de n :

3. Exprimer la somme $S_1 = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$:

4. Calculer v_1 et v_2 :

5. Exprimer v_n en fonction de n :

6. Exprimer la somme $S_2 = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$:

7. Calculer w_1 et w_2 :

8. Exprimer la somme $S = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ en fonction de S_1 et S_2 :

1.2 PRÉREQUIS

Exercice 3

Soit une suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout entier n.
On considère la propriété P, dépendant de l'entier n, $P\left(n\right)$: « $0 \leq u_n \leq 2$ », avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la propriété est vérifiée pour $n = 0$:

2. On suppose que $P\left(n\right)$ est vraie pour un certain entier naturel n, c'est-à-dire que pour cet entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

Montrer qu'alors $P(n+1)$ est vérifiée : ....

....

....

La question 1 permet de dire que $P(n)$ est vraie « au départ », elle est initialisée et la deuxième question permet de dire que $P(n)$ est héréditaire (le fait d'être vraie à un certain rang implique qu'elle est vraie au rang suivant). On peut donc déduire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n, c'est ce que l'on appelle le **principe de récurrence**.

2 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

2.1 LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

Théorème 2.1 (admis)

Soit n_0 un entier et soit $P(n)$ une propriété définie pour n entier naturel avec $n \geq n_0$.
Si la propriété vérifie deux conditions :

- **Initialisation :** $P(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité :** Si « $P(n)$ vraie pour un entier naturel $n \geq n_0$ fixé » entraîne que « $P(n+1)$ est vraie » alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

EXEMPLES

- Considérons la propriété $P(n)$: « $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ », avec $n \in \mathbb{N}^*$.
  - **Initialisation :** Il s'agit du premier terme de l'ensemble dans lequel appartient n, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{N}^*$. Donc vérifions la propriété pour $n=1$.

    D'une part, on a : 1 (c'est la somme où on commence à 1, en augmentant de 1 en 1 et on doit s'arrêter à 1 donc il n'y a qu'un seul terme) et d'autre part, on a : $\dfrac{1(1+1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$. L'égalité est vérifiée.
  - **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$.

    Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

    C'est-à-dire que l'on suppose que $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie et on souhaite montrer que $1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ est vraie, soit $1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

    On a : $1+2+\ldots+(n+1)=1+2+\ldots+n+(n+1) \overset{\overbrace{}^{HDR}}{=} \dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.

$1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

→ **Conclusion :** $P(n)$ est initialisée et est héréditaire ainsi la propriété est vraie pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$.

REMARQUES

→ HDR signifie que l'on a utilisé l'Hypothèse De Récurrence, c'est-à-dire ce que l'on a supposé vraie dans la partie Hérédité.

→ Pour démontrer une égalité, on peut démarrer d'un côté et en transformant, arriver de l'autre côté ou on peut partir de l'Hypothèse De Récurrence et arriver à l'égalité souhaitée.

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n. Considérons la propriété $P(n)$: « $0\leq u_n\leq 1$ », avec $n\in\mathbb{N}$.

  → **Initialisation :** Cela correspond à montrer les deux inégalités pour $n=0$.
  Comme $u_0=1$ et que $0\leq 1\leq 1$ alors $P(0)$ est vérifiée.

  → **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
  C'est-à-dire que l'on suppose que $0\leq u_n\leq 1$ est vraie et on souhaite montrer que $0\leq u_{n+1}\leq 1$ est vraie.
  Partons de l'hypothèse de récurrence : $0\leq u_n\leq 1$.
  Donc on a : $0\geq -u_n\geq -1$, soit $-1\leq -u_n\leq 0$.
  Comme la fonction exponentielle est croissante, on a : $e^{-1}\leq e^{-u_n}\leq e^0$.
  Donc $\dfrac{1}{e}\leq u_{n+1}\leq 1$. Or $0\leq\dfrac{1}{e}$ donc $0\leq u_{n+1}\leq 1$ et ainsi $P(n+1)$ est vraie.

  → **Conclusion :** $P(n)$ est initialisée et est héréditaire ainsi la propriété est vraie pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}$.

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0=7$ et $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$ pour tout entier n (On admet qu'elle est bien définie pour tout entier n).
  Considérons la propriété $P(n)$: « $u_{n+1}\leq u_n$ », avec $n\in\mathbb{N}$.

→ **Initialisation :** On doit montrer l'inégalité $u_1 \leq u_0$. Pour cela, calculons u_1.
On a $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{7+2} = 3$ et comme $u_0 = 7$, alors $P(0)$ est vérifiée.

→ **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
C'est-à-dire que l'on suppose que $u_{n+1} \leq u_n$ est vraie et on souhaite montrer que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ est vraie.
Partons de l'hypothèse de récurrence : $u_{n+1} \leq u_n$.
Donc on a : $u_{n+1} + 2 \leq u_n + 2$, ainsi $\sqrt{u_{n+1} + 2} \leq \sqrt{u_n + 2}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$.
Donc $u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

→ **Conclusion :** $P(n)$ est initialisée et est héréditaire ainsi la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
On peut donc déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

1. Montrer, par récurrence, que l'on a : $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer, par récurrence, que l'on a : $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer, par récurrence, que l'on a : $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Montrer, par récurrence, que l'on a : $u_n = 2^{n+2} - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Montrer, par récurrence, que l'on a : $2^n \geq (n+2)^2$, pour tout entier $n \geq 6$.

6. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a > 1$ et $u_{n+1} = {u_n}^2$.

a. Montrer par récurrence que l'on $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

b. Que peut-on déduire sur les variations de la suite (u_n) ?

REMARQUE

On peut montrer que la suite $\left(u_n\right)$ sera décroissante si on a $0<a<1$.
Et pourtant, la fonction *f* telle que $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$ (les termes u_n sont toujours positifs).

2.2 MAJORATION ET MINORATION

Définition 2.1

Soit une suite $\left(u_n\right)$.

- On dit que $\left(u_n\right)$ est **majorée** s'il existe un réel *M* tel que $u_n \leq M$ pour tout entier naturel *n*. Le réel *M* est alors un **majorant**.
- On dit que $\left(u_n\right)$ est **minorée** s'il existe un réel *m* tel que $m \leq u_n$ pour tout entier naturel *n*. Le réel *m* est alors un **minorant**.
- On dit que $\left(u_n\right)$ est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

REMARQUES

- Si *M* est un majorant de la suite, il y a évidemment une infinité de majorants : tout nombre supérieur ou égal à *M*. Si *m* est un minorant de la suite, il y a évidemment une infinité de minorants : tout nombre inférieur ou égal à *m*.
- Une suite $\left(u_n\right)$ n'est pas majorée si, pour tout réel *M*, il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > M$.
- Une suite $\left(u_n\right)$ n'est pas minorée si, pour tout réel *m*, il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} < m$.
- Pour obtenir la négation d'une expression mathématique, le « Pour tout » se transforme en « Il existe » et le « Il existe » se transforme en « Pour tout ». Et on prend la négation de la caractéristique.

Propriété 2.2

- Si une suite (u_n) est croissante alors elle est minorée par son premier terme.
- Si une suite (u_n) est décroissante alors elle est majorée par son premier terme.

DÉMONSTRATION

- Soit (u_n) une suite croissante alors pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq u_0$. En prenant $m = u_0$ alors $m \leq u_n$, pour tout entier n. Donc (u_n) est minorée par m, d'où le résultat.
- Soit (u_n) une suite décroissante alors pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq u_0$. En prenant $M = u_0$ alors $M \geq u_n$, pour tout entier n. Donc (u_n) est majorée par M, d'où le résultat. ■

EXEMPLES

- Soit (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \sin(n)$.
  Alors $-1 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n. Ainsi la suite est bornée par -1 et 1.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout entier n.
  Montrons que la suite est bornée par 0 et 2.
  On va le montrer par récurrence $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 2$ », pour $n \in \mathbb{N}$.
  - **Initialisation :** Cela correspond à montrer les deux inégalités pour $n = 0$.
    Comme $u_0 = 0$ et que $0 \leq 0 \leq 2$ alors $P(0)$ est vérifiée.
  - **Hérédité :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel n. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
    C'est-à-dire que l'on suppose que $0 \leq u_n \leq 2$ est vraie et on souhaite montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ est vraie.
    Partons de l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n \leq 2$.
    Donc on a : $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, ainsi $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,; +\infty[$. Donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$.