I Configurations de base et colinéarité dans le plan

QUESTION 1.

Considérons un carré tel que la moyenne entre la longueur d'un de ses côtés, notée a, son périmètre et son aire est égale à 2. On peut alors affirmer que :

a) a est égal au quart de l'aire de ce carré

b) a est égal au périmètre de ce carré

c) a est égal à l'aire de ce carré

d) a est égal à la moitié de l'aire de ce carré

QUESTION 2. ☞ *Avenir 2019*

Un carré a une aire égale à 48 cm². La longueur de l'une de ses diagonales est égale à :

a) $4\sqrt{6}$ cm **b)** $8\sqrt{3}$ cm **c)** $8\sqrt{6}$ cm **d)** $4\sqrt{3}$ cm

QUESTION 3.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les points suivants :

$$A(1\,;2) \qquad \text{et} \qquad B\left(m^2\,;2m^2\right)$$

Le nombre de valeurs que peut prendre le réel m pour lesquelles le point $\Omega(2020\,;2021)$ est aligné avec A et B est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

QUESTION 4.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les points suivants :

$$A\left(\frac{1}{x}\,;x\right), \qquad B(-8\,;1) \qquad \text{et} \qquad C\left(\frac{2}{x}\,;2x+1\right).$$

Combien existe-t-il de valeurs du nombre réel x telles que A, B, C soient trois points alignés ?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

QUESTION 5.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les points suivants :

$$A(1\,;2) \qquad \text{et} \qquad B\left(5m\,;-m^2\right)$$

Quel est le nombre de valeurs que peut prendre le réel m pour lesquelles le point A, le point B et l'origine sont trois points alignés ?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** une infinité

QUESTION 6.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u}(1\,;2) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(x\,;4x^2\right)$$

Le nombre de valeurs que peut prendre le réel x pour lesquelles il existe une infinité de vecteurs colinéaires à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

II Produit scalaire et équations cartésiennes des droites du plan

QUESTION 7. ☞ *Avenir 2009*

Sachant que dans un repère orthonormal, les points A, B et C ont pour coordonnées $A(-1\,;1)$, $B(1\,;0)$, $C(-2\,;-1)$, on peut alors affirmer que le triangle ABC est :

a) rectangle non isocèle
b) isocèle non rectangle
c) rectangle isocèle
d) aucune des précédentes propositions n'est correcte

Pour la question 8, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on considère la droite Δ passant par le point de coordonnées $(-4\,;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

QUESTION 8. ☞ *JPCA 2018*

La droite Δ passe également par le point de coordonnées :

a) $(-42\,;-13)$ **b)** $(-36\,;14)$ **c)** $(50\,;20)$ **d)** $(36\,;31)$

Pour la question 9, on considère à nouveau la droite Δ définie à la question 8.

QUESTION 9. ☞ *JPCA 2018*

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(4\,;-1)$ et de rayon $\sqrt{17}$.

a) la droite Δ ne coupe pas le cercle $\mathscr{C}$

b) la droite Δ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en exactement un point

c) la droite Δ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en exactement deux points

d) la droite Δ coupe le cercle $\mathscr{C}$ en exactement trois points

QUESTION 10.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(1,1),\quad B(2,2),\quad E(3,1),\quad \text{et}\quad F\left(0,\frac{m}{2}\right)$$

Le point C désigne le point de la droite (AB) d'ordonnée m.
Combien existe-t-il de valeurs du nombre réel m telles que le triangle EFC soit un triangle non aplati rectangle en F ?

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

QUESTION 11.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on définit le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_m$ par :

$$\mathscr{C}:\quad (x+4)^2+(y-1)^2=25 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}_m:\quad m^2x+(1-m)y=1\ ;$$

où m est un paramètre à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La valeur de m pour laquelle $\mathscr{D}_m$ est parallèle à la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(0\,;4)$ est :

a) -2 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 2

QUESTION 12.

Dans le plan muni d'un repère, on définit les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ par :

$$\mathscr{C}:\quad (x-2)^2+(y-1)^2=13 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}':\quad (x-1)^2+(y+1)^2=2$$

La tangente à $\mathscr{C}$ au point $B(4\,;4)$ et la tangente à $\mathscr{C}'$ au point $O(0\,;0)$ se coupent en :

a) le point O

b) le point B

c) le point de coordonnées $(1\,;6)$

d) le point de coordonnées $(-2\,;8)$

QUESTION 13.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on définit les droites $\mathscr{D}_m$ et Δ_m par :

$$\mathscr{D}_m : \quad mx + (1-m)y + 4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta_m : \quad (1+m)x - y + 2020 = 0,$$

où m est un paramètre réel. Les deux valeurs m_1 et m_2 de m pour lesquelles $\mathscr{D}_m$ et Δ_m sont perpendiculaires vérifient :

a) $m_1 + m_2 = -\dfrac{1}{2}$

b) $m_1 + m_2 = -1$

c) $m_1 + m_2 = -2$

d) $m_1 + m_2 = -3$

QUESTION 14.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit on considère les points $A(-2\,;-1)$ et $B(4\,;2)$. Le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $3x - y + 5 = 0$. Les coordonnées du point C appartenant à $\mathscr{D}$ tel que ABC soit en rectangle en C sont égales à :

a) $\left(\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{7}{2}\right)$

b) $\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{2}{3}\right)$

c) $\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right)$

d) $\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{7}{2}\right)$

Corrections

Correction du QCM 1 : Réponse C

Rappelons qu'un carré de côté $a > 0$ a un périmètre égal à $4a$ et une aire égale à a^2. Ainsi,

$$\frac{a+4a+a^2}{3} = 2 \iff \frac{5a+a^2}{3} = 2 \iff 5a+a^2 = 6 \iff a^2+5a-6 = 0$$

Résolvons l'équation du second degré $x^2+5x-6=0$.
Nous avons $\Delta = 5^2 - 4\times 1\times(-6) = 25+24 = 49 = 7^2$; $\Delta > 0$; deux solutions :

$$\frac{-5-\sqrt{7^2}}{2\times 1} = \frac{-5-7}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \qquad \text{et} \qquad \frac{-5+\sqrt{7^2}}{2\times 1} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ainsi, $a=-6$ ou $a=1$. Considérant que $a>0$, on a donc : $a=1$ et $a^2 = 1^2 = 1$.
Le réel a est donc égal à l'aire de ce carré.

Correction du QCM 2 : Réponse A

Nommons $ABCD$ le carré en question. Avec $AB = BC$, il vient :

$$AB\times BC = 48 \iff AB^2 = 48 \iff AB = \sqrt{48}$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle B assure que la longueur de la diagonale $[AC]$ est donnée par :

$$AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = \sqrt{48+48} = \sqrt{2\times 48} = \sqrt{2\times 16\times 3} = \sqrt{16}\times\sqrt{2\times 3} = 4\sqrt{6}$$

La longueur d'une diagonale de ce carré est donc égale à $4\sqrt{6}$ cm.

Correction du QCM 3 : Réponse C

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A\Omega}$:

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = m^2 - 1 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 2m^2 - 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_{\overrightarrow{A\Omega}} = x_\Omega - x_A = 2020 - 1 = 2019 \\ y_{\overrightarrow{A\Omega}} = y_\Omega - y_A = 2021 - 2 = 2019 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
A, B, \Omega \text{ alignés } &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{A\Omega} \text{ colinéaires} && \iff x_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{A\Omega}} - x_{\overrightarrow{A\Omega}}y_{\overrightarrow{AB}} = 0 \\
&\iff \left(m^2-1\right)\times 2019 - 2019\left(2m^2-2\right) = 0 && \iff m^2 - 1 - \left(2m^2-2\right) = 0 \\
&\iff m^2 - 1 - 2m^2 + 2 = 0 && \iff m^2 - 1 = 0 \\
&\iff m^2 - 1^2 = 0 && \iff (m-1)(m+1) = 0 \\
A, B, \Omega \text{ alignés } &\iff m = 1 \text{ ou } m = -1
\end{aligned}$$

En conclusion, il existe deux valeurs du réel m pour lesquelles les points A, B et Ω sont alignés, à savoir -1 et 1.
Une remarque : le candidat ayant une perception plus géométrique aura peut-être remarqué que l'équation réduite de la droite $(A\Omega)$ est $y = x+1$ alors que B appartient à la droite d'équation $y = 2x$. Si on veut que B soit aligné avec A et Ω, il est nécessaire qu'il se trouve au point d'intersection de ces deux droites... qui n'est autre que le point A lui-même.

CORRECTION DU QCM 4 : RÉPONSE B

Commençons par relever que le réel x est nécessairement non nul (observez l'abscisse du point A).
Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = -8 - \dfrac{1}{x} \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 1 - x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \\ y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = 2x+1-x = x+1 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} &\iff \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \\ &\iff x_{\overrightarrow{AB}}\, y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}}\, y_{\overrightarrow{AB}} = 0 \\ &\iff \left(-8 - \frac{1}{x}\right)(x+1) - \frac{1}{x} \times (1-x) = 0 \\ &\iff (x+1)(8x+1) + (1-x) = 0 \\ &\ \text{en multipliant les deux membres de cette équation par } -x \\ &\iff 8x^2 + x + 8x + 1 + 1 - x = 0 \\ &\iff 8x^2 + 8x + 2 = 0 \iff 4x^2 + 4x + 1 = 0 \iff (2x+1)^2 = 0 \\ A, B, C \text{ alignés} &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En conclusion, il existe une unique valeur du réel non nul x pour laquelle les points A, B et C sont alignés, à savoir $-\dfrac{1}{2}$.

CORRECTION DU QCM 5 : RÉPONSE C

Les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{OA}$ sont données par :

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{OA}} = x_A - x_O = 1 - 0 = 1 \\ y_{\overrightarrow{OA}} = y_A - y_O = 2 - 0 = 2 \end{cases}$$

Et de même, les coordonnés du vecteurs $\overrightarrow{OB}$: sont égales à celles de B : $\overrightarrow{OB}\left(5m\,; -m^2\right)$.
Il vient alors :

$$\begin{aligned} O, A, B \text{ alignés} &\iff \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OB} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff x_{\overrightarrow{OA}}\, y_{\overrightarrow{OB}} - x_{\overrightarrow{OB}}\, y_{\overrightarrow{OA}} = 0 \\ &\iff 1 \times (-m^2) - 5m \times 2 = 0 \qquad \iff m^2 + 10m = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} & \iff m(m+10)=0 & & \iff m=0 \text{ ou } m+10=0 \\ O, A, B \text{ alignés} & \iff m=0 \text{ ou } m=-10 & & \end{array}$$

Attention ! pour $m=0$, les coordonnées du point B sont $\left(5\times 0\,;-0^2\right)$, soit $(0\,;0)$. On a alors $B=O$ et, rigoureusement, on ne peut pas affirmer que les points A, B et l'origine sont trois points alignés...
En conclusion, il existe finalement une unique valeur du réel m pour laquelle les points A, B et O sont trois points alignés, à savoir -10.

CORRECTION DU QCM 6 : RÉPONSE C

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors il existe un unique vecteur colinéaire à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, à savoir le vecteur nul.
Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe une infinité de vecteurs colinéaires à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ puisqu'alors tout vecteur colinéaire est également colinéaire à l'autre.
La question revient donc à se demander combien il existe de valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Or,

$$\begin{array}{llll} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} & \iff x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}y_{\vec{u}} = 0 & & \\ & \iff 1\times 4x^2 - x\times 2 = 0 & \iff 4x^2-2x=0 \\ & \iff 2x(2x-1)=0 & \iff 2x=0 \text{ ou } 2x-1=0 \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} & \iff x=0 \text{ ou } x=\dfrac{1}{2} & \end{array}$$

On peut donc conclure : il existe exactement deux valeurs de x pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, à savoir 0 et $\dfrac{1}{2}$.

CORRECTION DU QCM 7 : RÉPONSE C

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 1-(-1) = 2 \\ y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 0-1 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{\overrightarrow{AC}} = x_C - x_A = -2-(-1) = -1 \\ y_{\overrightarrow{AC}} = y_C - y_A = -1-1 = -2 \end{cases}$$

On a donc, d'une part :

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = x^2_{\overrightarrow{AB}} + y^2_{\overrightarrow{AB}} = 2^2+(-1)^2 = 4+1 = 5$$

et d'autre part :

$$AC^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = x^2_{\overrightarrow{AC}} + y^2_{\overrightarrow{AC}} = (-1)^2+(-2)^2 = 1+4 = 5$$

Donc $AB^2 = AC^2$ et $AB = AC$; le triangle ABC est isocèle en A. Par ailleurs,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}}x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}}y_{\overrightarrow{AC}} = 2\times(-1) - 1\times(-2) = -2+2 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux, c'est-à-dire que le triangle ABC est rectangle en A.
Finalement, on peut conclure : le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

CORRECTION DU QCM 8 : RÉPONSE D

Nommons A le point de coordonnées $(-4\,;1)$. Il vient :

$$
\begin{aligned}
M(x\,;y)\in\Delta &\iff && \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AM} \text{ sont orthogonaux}\\
&\iff && \vec{n}(3\,;-4)\cdot\overrightarrow{AM}(x_M-x_A\,;y_M-y_A)=0\\
&\iff && x_{\vec{n}}\times x_{\overrightarrow{AM}}+y_{\vec{n}}\times y_{\overrightarrow{AM}}=0\\
&\iff && 3(x_M-x_A)-4(y_M-y_A)=0\\
&\iff && 3(x+4)-4(y-1)=0\\
&\iff && 3x+12-4y+4=0\\
M(x\,;y)\in\Delta &\iff && 3x-4y+16=0
\end{aligned}
$$

La droite Δ admet donc $3x-4y+16=0$ pour équation cartésienne. Or,

* $3\times(-42)-4\times(-13)+16=-126+52+16=-126+68\neq 0$;
* $3\times(-36)-4\times 14+16=-108-56+16=-108-40\neq 0$;
* $3\times 50-4\times 20+16=150-80+16=86\neq 0$;
* $3\times 36-4\times 31+16=108-124+16=124-124=0$.

La droite Δ passe donc par le point de coordonnées $(36\,;31)$.

CORRECTION DU QCM 9 : RÉPONSE A

Commençons par déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$, droite passant par Ω et perpendiculaire à Δ. Comme $\vec{n}$ est un vecteur normal à δ, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
M(x\,;y)\in\mathscr{D} &\iff && \vec{n}(-4\,;1) \text{ et } \overrightarrow{\Omega M}(x_M-x_\Omega\,;y_M-y_\Omega) \text{ sont colinéaires}\\
&\iff && x_{\vec{n}}\times y_{\overrightarrow{\Omega M}}=x_{\overrightarrow{\Omega M}}\times y_{\vec{n}}\\
&\iff && -4(y_M-y_\Omega)=(x_M-x_\Omega)\times 1\\
&\iff && -4(y+1)=(x-4)\times 1\\
&\iff && -4y-4=x-4\\
M(x\,;y)\in\mathscr{D} &\iff && x+4y=0
\end{aligned}
$$

La droite $\mathscr{D}$ admet donc $x+4y=0$ pour équation cartésienne. Rappelons que la droite Δ admet quant à elle $3x-4y+16=0$ pour équation cartésienne (cf correction de la question 8). Par ailleurs,

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} x+4y=0\\ 3x-4y+16=0\end{cases} &\iff \begin{cases} x=-4y\\ 3\times(-4y)-4y+16=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-4y\\ -16y+16=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=-4\times 1\\ y=1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x=-4\\ y=1\end{cases}
\end{aligned}
$$