

Table des matières

Leçons de cours

I - Leçons d'algèbre et géométrie

101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.	12
102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.	14
103 Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.	16
104 Nombres premiers. Propriétés et applications.	18
106 PGCD dans Z et $K[X]$ où K est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.	20
107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang.	22
109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie.	24
110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.	26
112 Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.	28
113 Déterminants. Applications.	30
114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications.	32
117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.	34
120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.	36
121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel.	38
128 Barycentres. Applications.	40
142 Utilisation de groupes en géométrie.	42
143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.	44
144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.	46
150 Diverses factorisations de matrices. Applications.	48
151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	50
155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.	52
156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.	54
163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.	56
166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.	58
167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.	60
168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.	62
171 Groupe linéaire $GL(E)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E . Sous-groupes. Applications.	64
172 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.	66

II - Leçons d'analyse et probabilités

201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence.	70
202 Séries à termes réels positifs.	72
203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence.	74
204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes.	76
205 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espaces préhilbertien.	78

206	Parties compactes de \mathbb{R}^n . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.	80
207	Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.	82
208	Théorèmes de points fixes.	84
209	Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.	86
210	Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence.	88
212	Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.	90
213	Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre π	92
215	Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.	94
216	Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.	96
217	Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.	98
218	Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.	100
219	Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.	102
220	Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.	104
221	Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de \mathbb{R}	106
223	Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.	108
224	Équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$	110
225	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.	112
227	Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe.	114
228	Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.	116
229	Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires.	118
230	Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance.	120
231	Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.	122
232	Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.	124
235	Exponentielles de matrices : définition, propriétés, applications.	126
237	Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.	128
241	Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications.	130
244	Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Jensen.	132
251	Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique.	134
254	Méthodes d'approximation du nombre π . Aspects algorithmiques.	136
256	Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.	138
257	Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels,	140
258	Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.	142
260	Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples.	144
264	Fonctions développables en série entière. Exemples et applications.	146
266	Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.	148
267	La fonction Gamma.	150

Leçons d'exercices

III - Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

301	Exercices sur les groupes.	155
302	Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans \mathbb{Z}	156
304	Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.	157
305	Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.	158

306 Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.	159
307 Exercices faisant intervenir des dénombrements.	160
309 Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter.	161
310 Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.	162
311 Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.	163
312 Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.	164
314 Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.	165
315 Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.	166
317 Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.	167
319 Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.	168
321 Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.	169
322 Exercices sur les formes quadratiques.	170
323 Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.	171
325 Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.	172
339 Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.	173
340 Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.	174
348 Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.	175
351 Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.	176
353 Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.	177
355 Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.	178
356 Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.	179
357 Exercices utilisant le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	180

IV - Exemples et exercices d'analyse et probabilités

402 Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.	183
403 Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.	184
404 Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.	185
405 Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.	186
407 Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes.	187
408 Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.	188
409 Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.	189
410 Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite.	190
411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.	191
412 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.	192
413 Exemples d'applications des séries entières.	193
414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.	194
415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements.	195
417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.	196
418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.	197
421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue.	198
422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.	199
423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.	200
427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.	201
428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.	202
429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.	203
431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.	204
432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.	205

434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.	206
436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.	207
437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.	208
438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.	209
439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.	210
443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations $F(X) = 0$	211
444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série.	212
447 Exemples d'équations fonctionnelles.	213
449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.	214
451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.	215
452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.	216
453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.	217
455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.	218
 Bibliographie	 219