

Table des matières

I	Géométrie absolue	1
1	Géométrie ordonnée	3
1.1	Axiomes d'incidence	3
1.1.1	Entre un point et une droite	3
1.1.2	Entre un point et un plan	4
1.1.3	Entre une droite et un plan	4
1.1.4	Entre deux droites	4
1.1.5	Entre deux plans	5
1.2	Axiomes d'ordre	6
1.3	Demi-plan, demi-droite, demi-espace	8
1.3.1	Demi-plan	8
1.3.2	Demi-droite	10
1.3.3	Demi-espace	11
1.4	Orientation	12
1.4.1	D'une droite	12
1.4.2	D'un plan	14
1.4.3	De l'espace	18
1.5	Convexité	26
2	Longueurs	27
2.1	Longueurs et déplacement de demi-droites	27
2.1.1	Axiomes de déplacement	27
2.1.2	Définition des longueurs	28
2.2	Ordre et opérations	29
2.2.1	Ordre	29
2.2.2	Addition	30
2.2.3	Soustraction	31
2.3	Vecteurs d'une droite	32
2.3.1	Equipollence	32
2.3.2	Addition	33
2.3.3	Multiplication par un entier relatif	34

2.4	Isométries de droites	36
2.4.1	Propriétés générales	36
2.4.2	Le groupe des isométries d'une droite	38
3	Angles et triangles	41
3.1	Angle figure	41
3.1.1	Définition des angles et des triangles	41
3.1.2	Intérieur d'un angle, d'un triangle	41
3.2	Angle grandeur	43
3.2.1	Axiomes de déplacement	43
3.2.2	Définition d'un angle grandeur	45
3.2.3	Coordonnées polaires	46
3.3	Deux cas d'égalité des triangles	47
3.4	Ordre et opérations sur les angles	48
3.4.1	Ordre	48
3.4.2	Addition	51
3.4.3	Soustraction	58
3.5	Angles et sécante	59
3.6	Angles droits	61
3.7	Inégalités dans un triangle	63
3.7.1	Dans un triangle quelconque	63
3.7.2	Dans un triangle rectangle	66
3.8	Autres cas d'égalité des triangles	67
3.9	Diviser par deux les longueurs et les angles	70
3.9.1	Milieu	71
3.9.2	Bissectrices	72
4	Orthogonalité	77
4.1	Droites perpendiculaires	77
4.1.1	Rappels	77
4.1.2	Médiatrice	77
4.1.3	Quadrilatère de Khayyam	78
4.2	Droite perpendiculaire à un plan	80
4.2.1	Définition	80
4.2.2	Plan perpendiculaire à une droite donnée	82
4.2.3	Plan médiateur	83
4.2.4	Droite perpendiculaire à un plan donné	84
4.3	Projection orthogonale	85
4.3.1	Définition et propriétés	85
4.3.2	Caractérisation des angles aigus	88
4.3.3	Caractérisation des bissectrices	88
4.4	Droites orthogonales	90

4.5	Rectiligne d'un dièdre	91
4.6	Plans perpendiculaires	93
5	Cercles	95
5.1	Quelques définitions	95
5.2	Problèmes d'intersection	96
5.3	Cercles circonscrits, inscrits, exinscrits	99
5.4	Quelques inégalités	102
5.5	Arcs de cercle	105
5.5.1	La figure	105
5.5.2	Égalité d'arcs	107
5.5.3	Addition	109
5.5.4	Ordre sur les arcs	112
5.5.5	Soustraction	112
6	Polygones	115
6.1	Quelques définitions	115
6.1.1	Ligne polygonale	115
6.1.2	Polygone	115
6.2	Les polygones convexes	116
6.2.1	Définition	116
6.2.2	Intérieur d'un polygone convexe	117
6.2.3	Convexité des quadrilatères	119
6.2.4	Convexité des polygones inscrits dans un cercle	121
6.2.5	Inégalités périmétriques	124
6.3	Les polygones simples	128
6.3.1	Simplicité, transversalité	129
6.3.2	Théorème d'équiparité	131
6.3.3	Faces d'un polygone simple	135
6.3.4	Intérieur et extérieur d'un polygone simple	139
6.3.5	Problèmes d'inclusion, triligne	143
6.4	Critère angulaire de convexité	152
6.5	Triangulation d'un polygone simple	163
6.6	Formule d'Euler pour les graphes plans	165
7	Isométries planes	171
7.1	Propriétés générales	171
7.2	Le groupe des isométries d'un plan	173
7.3	Symétries	175
7.3.1	Symétrie axiale	175
7.3.2	Symétrie centrale	179
7.3.3	Isométries involutives	180

7.4	Glissements	181
7.5	Rotations	182
7.5.1	Définition des rotations	182
7.5.2	Groupe des rotations de même centre	182
7.5.3	Définition des angles orientés	184
7.5.4	Angle d'une rotation	186
7.5.5	Groupe des angles orientés	187
7.5.6	Angles orientés de droites	192
7.5.7	Arcs orientés	195
7.6	Isométries planes et polygones réguliers	196
7.6.1	Sous-groupes finis d'angles orientés	196
7.6.2	Polygones réguliers	203
7.6.3	Polygones réguliers convexes	207
7.6.4	Groupe diédral	209
7.7	Isométries et faisceaux de droites	210
7.7.1	Classification des isométries planes	210
7.7.2	Conjugaison d'une symétrie par une symétrie axiale	212
7.7.3	Suite proportionnelle de droites	214
7.7.4	Droites liées	216
7.7.5	Théorème de Hjelmslev, théorème de transitivité	219
7.7.6	Faisceaux de droites	224
7.7.7	Droites remarquables d'un triangle	226
7.7.8	Théorème d'antiappariement	229
8	Isométries de l'espace	235
8.1	Le groupe des isométries de l'espace	235
8.2	Symétrie par rapport à un plan	240
8.3	Glissements de l'espace	242
8.4	Rotations de l'espace	244
8.4.1	Définition et lien avec les rotations planes	244
8.4.2	Groupe des rotations de même axe	247
8.4.3	Demi-tours	248
8.5	Groupe des isométries fixant un point	251
9	Géométrie sphérique	253
9.1	Quelques définitions	253
9.2	Problèmes d'intersection	254
9.3	Incidence et ordre sur la sphère	256
9.4	Grandeurs sphériques	258
9.4.1	Longueurs sphériques	258
9.4.2	Angles sphériques	259
9.4.3	s -milieu, s -médiatrice, s -bissectrice	260

9.5	Cercles sur une sphère	262
9.6	Isométries de la sphère	265
9.6.1	Isométries induites	265
9.6.2	Trois cas d'égalité des triangles sphériques	266
9.6.3	Le groupe des isométries de la sphère	267
9.7	Polarité et quatrième cas d'égalité	269
9.8	Polygones sphériques	272
9.8.1	Les polygones sphériques convexes	273
9.8.2	Faces d'un polygone sphérique simple	275
9.8.3	Triligne sphérique	277
9.8.4	Formule d'Euler pour les graphes sphériques	280
10	Polyèdres	285
10.1	Quelques définitions	285
10.2	Cas d'égalité des trièdres	286
10.3	Convexité	287
10.4	Les 5 polyèdres réguliers convexes	289
10.5	Polyèdres et groupes finis d'isométries	292
10.6	Exercices	308
11	Grandeurs	309
11.1	Type de grandeur	309
11.1.1	Propriétés générales	310
11.1.2	Type de grandeur archimédien	318
11.1.3	Type de grandeur continu	324
11.1.4	Correspondances	328
11.2	Géométrie archimédienne	331
11.2.1	Conséquences pour les angles	331
11.2.2	Quadrilatères de Khayyam et d'Al Haytham	337
11.2.3	Conséquences pour les arcs	339
11.2.4	Conséquences pour la sphère	340
11.2.5	Mesure algébrique des grandeurs orientées	346
11.2.6	Couples et triangles euclidiens	348
11.3	Géométrie continue	355
11.3.1	Continuité des grandeurs	355
11.3.2	Longueur d'un arc	356
11.3.3	Problèmes d'intersection	362
11.3.4	Polygones et polyèdres réguliers convexes	367
11.3.5	Parallèle limite	371

II	Géométrie euclidienne	373
12	Parallélisme	375
12.1	Angles alternes internes	375
12.2	Directions	377
12.2.1	De droites	377
12.2.2	De plans	378
12.2.3	Orthogonalité	379
12.3	Parallélogrammes	383
12.3.1	Diverses définitions équivalentes	383
12.3.2	Rectangle	384
12.3.3	Losange	386
12.3.4	Carré	386
12.3.5	Axes de symétrie	386
12.3.6	Parallélépipède	386
12.4	Classification des isométries	387
12.4.1	Compléments sur les glissements	387
12.4.2	Classification des isométries planes	388
12.4.3	Classification des isométries de l'espace	390
12.4.4	Isométries conservant les directions	391
12.5	Droite des milieux, médianes	392
12.6	Angles de directions	394
12.7	Exercices	395
13	Proportions	399
13.1	Orientation d'une direction et mesure algébrique	399
13.2	Proportions et projections	401
13.2.1	Projection suivant une direction	401
13.2.2	Théorème de Thalès	403
13.2.3	Projection centrale et birapport	405
13.3	Triangles semblables	407
13.4	Relations dans un triangle rectangle	409
13.5	Le corps des scalaires	410
13.6	Coordonnées cartésiennes	411
13.7	Points divisant un segment	412
13.7.1	Dans un rapport donné	412
13.7.2	Division harmonique	414
13.7.3	Le nombre d'or	420
13.8	Alignement et concours	421

14 Aires	425
14.1 Définition des aires	425
14.2 Triangles, parallélogrammes, rectangles	426
14.3 Addition	429
14.4 Ordre	432
14.5 Soustraction	433
14.6 Mesure	435
14.7 Quelques applications	437
15 Cercles	441
15.1 Problèmes d'intersection	441
15.2 Cercles circonscrits, inscrits, exinscrits	443
15.3 Cercle d'Apollonius	444
15.4 Angle inscrit	445
15.5 Conditions de cocyclicité	452
15.5.1 Condition angulaire	452
15.5.2 Conditions métriques	453
15.6 Tangentes	457
15.7 Quelques constructions de polygones réguliers	458
15.7.1 $n = 3$ et AB est donné	458
15.7.2 $n = 4$	458
15.7.3 $n = 6$	459
15.7.4 $n = 3$ et \mathcal{C} est donné	460
15.7.5 $n = 5$	460
15.8 Périmètre et aire	462
15.8.1 Périmètre	462
15.8.2 Aire	465
15.9 Exercices	466
16 Trigonométrie	471
16.1 Cas des angles grandeur	471
16.1.1 Définition des lignes trigonométriques	471
16.1.2 Supplémentaire, complémentaire	474
16.1.3 Quelques valeurs	475
16.2 Relations métriques dans le triangle	476
16.3 Cas des angles orientés	478
16.3.1 Définition des lignes trigonométriques	478
16.3.2 Cercle trigonométrique	479
16.3.3 Addition d'un angle droit ou plat	481
16.3.4 Formules d'addition	482
16.4 Fonctions trigonométriques	483
16.4.1 Mesure des angles en radians	483

16.4.2	Définition des fonctions trigonométriques	486
16.4.3	Dérivabilité	486
16.4.4	Fonctions réciproques	487
16.4.5	Calcul de π	488
16.5	Exercices	489
17	Vecteurs	491
17.1	Structure d'espace vectoriel	491
17.1.1	La relation d'équipollence	491
17.1.2	Addition	492
17.1.3	Multiplication par un scalaire	494
17.1.4	Sous-espaces vectoriels	494
17.2	Calcul barycentrique	497
17.2.1	Définition du barycentre	497
17.2.2	Calcul sur les points	498
17.2.3	Isobarycentre	499
17.2.4	Coordonnées barycentriques	500
17.2.5	Alignement et concours	501
17.2.6	Convexité.	505
17.3	Algèbre linéaire	507
17.3.1	bases, matrices	508
17.3.2	Applications linéaires	510
17.3.3	Déterminants	513
17.3.4	Coordonnées cartésiennes	517
17.3.5	Applications affines	519
17.4	Calcul vectoriel métrique	524
17.4.1	Produit scalaire	524
17.4.2	Isométries	528
17.4.3	Similitudes	535
17.4.4	Produit vectoriel	542
17.4.5	Trigonométrie sphérique	544
17.5	Exercices	546
18	Géométrie anallagmatique	553
18.1	Orthogonalité	553
18.2	Faisceaux	555
18.2.1	Axe radical de deux cercles	555
18.2.2	Faisceau de cercles	556
18.2.3	Conjugaison	558
18.2.4	Faisceau de sphères	559
18.3	Birapport de quatre points cocycliques	560
18.4	Propriétés harmoniques	562

18.4.1	Polarité par rapport à un cercle	562
18.4.2	Division harmonique sur un cercle	568
18.4.3	Polarité par rapport à une sphère	569
18.5	Inversion	569
18.5.1	Définition	569
18.5.2	Points inverses par rapport à un cercle, une sphère	570
18.5.3	Image d'une droite, d'un cercle, d'un plan, d'une sphère	571
18.5.4	Action sur les longueurs, les angles	573
18.5.5	Invariant anallagmatique	575
18.6	Groupe circulaire	577
18.6.1	Plan anallagmatique et transformations circulaires	577
18.6.2	Générateurs	580
18.6.3	Forme réduite d'une transformation circulaire	584
18.7	Exercices	586
III Géométrie de Lobatchevsky		589
19	Incidence, longueurs et angles	591
19.1	Parallèles limites	591
19.1.1	Axiome de Lobatchevsky	591
19.1.2	Les bouts	592
19.1.3	Angle de parallélisme	598
19.2	Quelques inégalités	599
19.2.1	Angles alternes internes	599
19.2.2	Quadrilatères de Khayyam et d'Al Haytham	600
19.2.3	Somme des angles d'un triangle	601
19.2.4	Quadrilatère ayant deux angles droits	603
19.2.5	Projection orthogonale	604
19.3	Position relative de deux droites	605
19.4	Triangles limites de première espèce	606
19.5	Surjectivité de l'angle de parallélisme	608
19.6	Triangles limites de seconde espèce	611
19.7	Triangles limites de troisième espèce	612
20	Isométries, bouts et faisceaux	615
20.1	Classification	615
20.1.1	Des isométries directes	615
20.1.2	Des faisceaux	616
20.1.3	Groupe des rotations généralisées de même centre	617
20.2	Isométries conservant un faisceau	618
20.2.1	Faisceau elliptique	618

20.2.2	Faisceau hyperbolique	618
20.2.3	Faisceau parabolique	619
20.3	Équidistantes	620
20.4	Horicycles	621
20.4.1	Définition	621
20.4.2	Problèmes d'intersection	621
20.4.3	Arcs d'horicycle	623
20.4.4	Longueurs d'arc	625
21	Modèle de Poincaré	627
21.1	Axiomes d'incidence	628
21.2	Axiomes d'ordre	628
21.3	Axiomes de déplacement	633
21.4	Axiomes des grandeurs	636
21.5	Axiome de Lobatchevsky	637
21.6	Expression de l'angle de parallélisme	639
22	Arithmétique des bouts	641
22.1	Le corps des bouts	641
22.1.1	Addition	641
22.1.2	Ordre	642
22.1.3	Multiplication	643
22.1.4	Le corps des bouts	644
22.2	Isométries et homographies	645
22.2.1	Le groupe des homographies	645
22.2.2	Homographie induite par une isométrie	646
22.2.3	Bouts fixes d'une homographie	648
22.2.4	Involutions, faisceaux, équation tangentielle d'un point	649
22.2.5	Rotations	652
22.3	Coordonnées	653
22.3.1	Coordonnées (pseudo)-orthogonales, (pseudo)-polaires	653
22.3.2	Relations	654
22.3.3	Coordonnées de Poincaré	657
22.4	Trigonométrie	659
22.4.1	Définition des fonctions trigonométriques	659
22.4.2	Relations trigonométriques entre coordonnées	660
22.4.3	Relations métriques dans un triangle rectangle	661
22.4.4	Relations métriques dans un triangle quelconque	662
22.5	Quelques applications	663
22.5.1	Construction de la l -parallèle	663
22.5.2	Orthocentre	665

A	Liste des axiomes	667
A.1	Axiomes d'incidence	667
A.2	Axiomes d'ordre	667
A.3	Axiomes de déplacement	668
A.4	Axiomes des grandeurs	669
A.5	Axiomes de parallélisme	669
A.6	Axiomes de la géométrie absolue	669
A.7	Axiomes de la géométrie euclidienne	669
A.8	Axiomes de la géométrie de Lobatchevsky	670
B	Note sur la construction des réels	671
B.1	Ordre	671
B.2	Addition	672
B.3	Multiplication	672
B.4	Le corps des réels	673
B.5	Valeur approchée	673