# Chapitre 1

# Nombres complexes

## 1.1 Point de vue algébrique

### 1.1.1 Point de cours

**Définitions et propriétés :** il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
2. L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul sont les mêmes.
3. Il existe un nombre complexe, noté $i$, tel que $i^2 = -1$.
4. Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec $a$ et $b$ réels.

• L'écriture $z = a + ib$ avec $a$ et $b$ réels est la **forme algébrique** du nombre complexe $z$. $a$ est la **partie réelle** de $z$, elle est notée $\Re e(z)$. $b$ est la **partie imaginaire** de $z$, elle est notée $\Im m(z)$.
• Le nombre complexe $a - ib$ est appelé **conjugué de** $z$ et noté $\overline{z}$.

**Formule du binôme :** Pour tous nombres complexes $a$ et $b$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

### 1.1.2 Exercices d'application du cours

**Exercice 1** **10 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme algébrique :

**1.** $z = (2+5i) + (8+9i)$
**2.** $z = (9-3i) + (3+6i)$
**3.** $z = (2+5i) + (8i-9)$
**4.** $z = (2+5i) - (8+9i)$
**5.** $z = (-2-2i) - (3+4i)$
**6.** $z = (2+5i) - (8i-9)$
**7.** $z = (2+5i) + 3(8+9i)$
**8.** $z = 2(9-3i) + 5(3+6i)$
**9.** $z = 3(2-2i) - 2(3+4i)$
**10.** $z = 9(2+5i) - 5(8+9i)$
**11.** $z = (9-3i) - 3(3+6i)$
**12.** $z = -3(-2-2i) + (3+4i)$

**EXERCICE 2** **5 minutes**

Déterminer le conjugué de chaque nombre complexe :

**1.** $z = 1 + i$

**2.** $z = -3 + 2i$

**3.** $z = \sqrt{3} - i$

**4.** $z = -3i$

**5.** $z = 2i(3 - 4i)$

**6.** $z = (2 - i)(1 + 2i)$

**7.** $z = -1 - i\sqrt{2}$

**8.** $z = 2$

**EXERCICE 3** **10 minutes**

Calculer le produit $z\overline{z}$ dans les cas suivants :

**1.** $z = 1 + i$

**2.** $z = 1 - i$

**3.** $z = -1 + 3i$

**4.** $z = 4 - 3i$

**5.** $z = \sqrt{5}$

**6.** $z = 7i$

**7.** $z = 5i - 7$

**8.** $z = 6 + 8i$

**9.** $z = -3 - 6i$

**10.** $z = -i\sqrt{7}$

**11.** $z = -9$

**12.** $z = -\sqrt{19} - i\sqrt{6}$

**EXERCICE 4** **15 minutes**

Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

**1.** $z = (2 + 7i) - 2(8 + 2i)$

**2.** $z = (4 - i) + 5i(3 - 2i)$

**3.** $z = (2 + 4i)(3 - 2i)$

**4.** $z = \dfrac{1}{3 + 5i}$

**5.** $z = (2 + 3i)^2$

**6.** $z = (2 + i)^2 - (2 - i)^2$

**7.** $z = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2}$

**8.** $z = \dfrac{2 + 4i}{2 - 4i}$

**EXERCICE 5** **15 minutes**

Ecrire les expressions suivantes sous leur forme algébrique :

**1.** $z = \dfrac{2 + 5i}{8 + 9i}$

**2.** $z = \dfrac{-2 - 2i}{3 + 4i}$

**3.** $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$

**4.** $z = \dfrac{\sqrt{3} - i}{1 + i}$

**5.** $z = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

**6.** $z = \dfrac{(2 + 5i)(8 - 9i)}{2i(3 - 2i)}$

**EXERCICE 6** **10 minutes**

**1.** Calculer $i^2$, $i^3$, $i^4$ et $i^5$.

**2.** Calculer $i^n$ en fonction de $n$.

**3.** En déduire l'expression algébrique de $Z = 2i^{2020} - 3i^{2021}$

**EXERCICE 7** **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes (on donnera les solutions sous forme algébrique) :

**1.** $z + 2 - 3i = 0$.

**2.** $3z + 8i - 2 = 0$.

**3.** $2 - 3i - 2z = 0$.

**4.** $2iz + 2 = 0$.

**5.** $iz + 2 - 3i = 0$.

**6.** $3iz + 4 = 4z - 2i$.

**EXERCICE 8** **15 minutes**

En posant $z = a + ib$, avec $a$ et $b$ réels, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

**1.** $3iz + \overline{z} = 2 + i$.

**2.** $z + 2\overline{z} = 0$.

**3.** $2z - i\overline{z} = 3$.

**4.** $iz - 3\overline{z} = 5 + 2i$

**5.** $z + i\overline{z} = 6 + 2i$

**6.** $z + \overline{z} = 8$.

**EXERCICE 9** **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

**1.** $2iz+3-4i=0$
**2.** $(3+2i)z+4-5i=0$
**3.** $3\overline{z}+6-12i=0$
**4.** $i\overline{z}+5-i=0$
**5.** $(2+3i)z+5\overline{z}=4$
**6.** $(1+i)z=(3-5i)\overline{z}$

**EXERCICE 10** **5 minutes**

Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $\overline{z}-3iz-3+6i=0$.

**EXERCICE 11** **10 minutes**

Soit $z_1 = 1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ et $z_2=\sqrt{6}+i\sqrt{6}$.
Calculer $z_1z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.

**EXERCICE 12** **10 minutes**

Soit $z=2+3i$, et $Z=\dfrac{z^2+z+1}{z^4-1}$.
Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z$.

**EXERCICE 13** **10 minutes**

En utilisant la formule du binôme, développer les expressions suivantes :
$A=(1+i)^7$, $B=(1-i)^8$

### 1.1.3 Exercices d'approfondissement

**EXERCICE 14** **10 minutes**

Démontrer que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

**EXERCICE 15** **10 minutes**

Soit $z$ un nombre complexe et $\overline{z}$ son conjugué. Démontrer que :

**1.** $\overline{\overline{z}}=z$
**2.** $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
**3.** $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$
**4.** $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
**5.** $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$
**6.** $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

**EXERCICE 16** **10 minutes**

Soit $z$ un nombre complexe. Démontrer que :

**1.** $z=\overline{z}$ si et seulement si $z$ est réel.
**2.** $z=-\overline{z}$ si et seulement si $z$ est imaginaire pur.

**EXERCICE 17** **10 minutes**

L'objectif de cet exercice est de déterminer les racines du nombre complexe $45-28i$.

**1.** Développer $(a+ib)^2$.
**2.** En déduire $z$ tel que $z^2=45-28i$

**EXERCICE 18** **10 minutes**

Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = 10 - 4i\sqrt{6}$.

**EXERCICE 19** **10 minutes**

Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = 6 + \frac{5}{2}i$.

**EXERCICE 20** **10 minutes**

Déterminer les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = 3 + 4i$.

**EXERCICE 21** **10 minutes**

A tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ par l'application $f$ qui admet pour écriture complexe : $z' = \dfrac{(3+4\mathrm{i})z + 5\overline{z}}{6}$.

**1.** On pose $z = x + iy$ (avec $x$ et $y$ réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z'$ en fonction de $x$ et $y$.

**2.** Résoudre l'équation $z' = 0$.

**EXERCICE 22** **10 minutes**

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_\mathrm{A}, z_\mathrm{B}$ et $z_\mathrm{C}$ où $z_\mathrm{A} = 1 + 2i$, $z_\mathrm{B} = \overline{z_\mathrm{A}}$, et $z_\mathrm{C} = 1 + \sqrt{3} + i$.

Calculer $\dfrac{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{C}}{z_\mathrm{A} - z_\mathrm{C}}$ et donner le résultat sous forme algébrique.

**EXERCICE 23** **10 minutes**

**1.** Démontrer par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1} - n i^n + i}{2}$.

**2.** En déduire que, quel que soit $k \in \mathbb{N}^\star$
$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (2k+1)(-1)^k = (k+1)(-1)^k$
$S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 2k(-1)^{k-1} = \dfrac{1 - (2k+1)(-1)^k}{2}$

**EXERCICE 24** **10 minutes**

Démonter la formule du binôme : Pour tous nombres complexes $a$ et $b$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**EXERCICE 25** **5 minutes**

Résoudre, dans $\mathbb{C}$, le système

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 2iz_1 & - & z_2 & = & 1-6i \\ z_1 & + & 2iz_2 & = & i \end{array} \right.$$

**EXERCICE 26** **15 minutes**

**1.** Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, développer $(1+z)^n$.

**2.** En remplaçant $z$ successivement par $1$, $-1$, $i$ et $-i$, calculer :

**a.** $S_1 = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots$.

**b.** $S_2 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots$.

**c.** $S_3 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots$.

**d.** $S_4 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$.

**EXERCICE 27** **10 minutes**

**1.** Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$.

**2.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $(a+ib)^4 = \frac{73}{16} - i\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

**EXERCICE 28** **10 minutes**

**1.** Calculer $\left(1 + i\sqrt{2}\right)^4$.

**2.** Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $(a+ib)^4 = -7 - 4i\sqrt{2}$.

**EXERCICE 29** **20 minutes**

Soit $(S_n)$ la suite définie pour tout $n$ entier naturel par $S_n = 1 + j + j^2 + \cdots + j^n$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**1.** Calculer $j^2$, $j^3$, $j^4$, $j^5$ et $j^6$.

**2.** En déduire $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$ et $S_6$.

**3.** Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $j^{3p} = 1$.

**4.** Calculer $S_{3p}$.

**5.** En déduire $S_n$ en fonction de $n$.

**EXERCICE 30** **10 minutes**

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres complexes $z$ tels que $z + \overline{z} + z\overline{z} = 0$.

**EXERCICE 31** **15 minutes**

**1.** Soit $E$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$, où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.
Est-ce que, quels que soient $z$ et $z'$ appartenant à $E$, $z' \neq 0$, il existe $z$" appartenant à $E$ tel que $z = z'z$".

**2.** Soit $F$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$, où $x$ et $y$ sont des nombres rationnels non nuls.
Est-ce que, quels que soient $z$ et $z'$ appartenant à $F$, $z' \neq 0$, il existe $z$" appartenant à $F$ tel que $z = z'z$".

**EXERCICE 32** **10 minutes**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \frac{z+1}{\overline{z}-1}$.
Soit $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan complexe.

**1.** Déterminer l'ensemble, $\mathcal{M}_1$, des points $M$ tels que $f(z)$ soit réel.
**2.** Déterminer l'ensemble, $\mathcal{M}_2$, des points $M$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

**EXERCICE 33** **10 minutes**

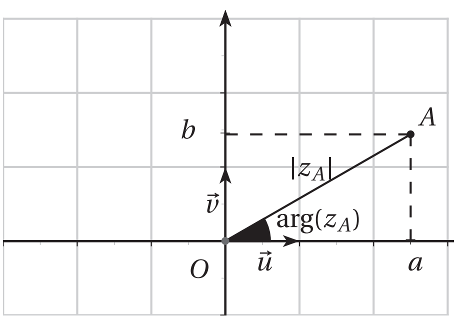
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{C}\setminus\left\{-i\right\}$ par $f(z)=\dfrac{z-2}{z+i}$.
Soit $M$ le point d'affixe $z$ dans le plan complexe.

**1.** Déterminer l'ensemble, $\mathcal{M}_1$, des points $M$ tels que $f(z)$ soit réel.
**2.** Déterminer l'ensemble, $\mathcal{M}_2$, des points $M$ tels que $f(z)$ soit imaginaire pur.

## 1.2 Point de vue géométrique

### 1.2.1 Point de cours

Le plan est rapporté à un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, il est ainsi appelé **plan complexe**.
Le nombre complexe $z=a+ib$ ($a$ et $b$ réels) est représenté par le point $M(a;b)$. On dit que $M$ est l'**image** de $z$ et que $z$ est l'**affixe** du point $M$ ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.




**Propriétés :** soit $A$ et $B$ deux points du plan complexe d'affixes $z_A$ et $z_B$.
• Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$.
• Si $I$ est le milieu de $[AB]$, $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

**Module d'un nombre complexe :** $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\|\overrightarrow{OM}\|$.
• $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=|z_B-z_A|$.

**Définition :** L'ensemble $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**Propriétés :** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.
• $|z|^2=z\overline{z}$ • $\left|z\times z'\right|=|z|\times\left|z'\right|$ • $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$

**Argument d'un nombre complexe :** $\arg z=\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}\right)$.

**Propriétés :** Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

- $arg(zz') = arg(z) + arg(z')\ [2\pi]$
- $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)\ [2\pi]$

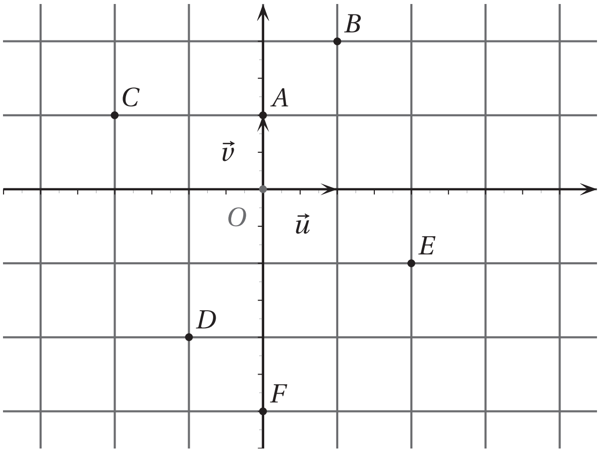
**Forme trigonométrique :** l'écriture $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ est appelée forme trigonométrique de $z$, où $r$ désigne **le module** du nombre complexe $z$ et $\theta$ désigne **un argument** de $z$.

### 1.2.2 Exercices d'application de cours

**EXERCICE 34** **10 minutes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Lire les affixes des points $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ et $F$.
2. Placer les points $G$, $H$, $P$, $Q$ et $R$ d'affixes :
   $z_G = 3-2i$, $z_H = -1-3i$, $z_P = 3i$, $z_Q = -3$ et $z_R = -2+2i$




**EXERCICE 35** **10 minutes**

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :

1. $z = 1+i$
2. $z = 3-2i$
3. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$
4. $z = -2-5i$
5. $z = -4+5i$
6. $z = -\sqrt{5} - 2i\sqrt{3}$

**EXERCICE 36** **10 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes $z_A = 3+2i$, $z_B = -i$ et $z_C = -2+i$.

1. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer l'affixe du point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'affixe du centre $I$ du parallélogramme $ABCD$.

**EXERCICE 37** **5 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives : $z_A = 2+i$, $z_B = 1+3i$, $z_C = -2+2i$ et $z_D = -1$.

1. Calculer $z_{\overrightarrow{AB}}$ et $z_{\overrightarrow{DC}}$.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

**EXERCICE 38** **5 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives : $z_A = 1+i$, $z_B = -2i$ et $z_C = -2$.

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A$ passant par $B$.

1. Calculer le rayon $R$ du cercle $\mathcal{C}$.
2. Vérifier que le point $C$ appartient au cercle $\mathcal{C}$.

**EXERCICE 39** **10 minutes**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $z_A = 2-i$ et $z_B = 2i$.

1. Déterminer, de manière algébrique, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant l'équation $|z - z_A| = 3$.
2. Déterminer, de manière géométrique, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant l'équation $|z - z_A| = 3$.
3. Déterminer, de manière algébrique, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.
4. Déterminer, de manière géométrique, l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ vérifiant l'équation $|z - z_A| = |z - z_B|$.

**EXERCICE 40** **10 minutes**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations par deux méthodes :

1. $|z-3+2i| = 5$
2. $|z+2+i| = 1$
3. $\left|2z+1-i\sqrt{3}\right| = 4$
4. $|z-3+2i| = |z-i|$
5. $|z+2+i| = |5+2i-z|$
6. $\left|2z+1-i\sqrt{3}\right| = 2\left|z+\sqrt{3}-i\right|$

**EXERCICE 41** **10 minutes**

Démontrer les propriétés suivantes :

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $\left|\overline{z}\right| = |-z| = |z|$
3. $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
4. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
5. $|z^n| = |z|^n$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

**EXERCICE 42** **10 minutes**

Soient $z_1$ et $z_2$ deux éléments de $\mathbb{U}$ et $n$ un entier naturel.

Démontrer que :

1. $z_1 z_2$ est un élément de $\mathbb{U}$.
2. $z_1^n$ est un élément de $\mathbb{U}$.
3. Vérifier que $z_1 \neq 0$.
4. $\dfrac{1}{z_1}$ est un élément de $\mathbb{U}$.
5. $\dfrac{z_2}{z_1}$ est un élément de $\mathbb{U}$.
6. $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^n$ est un élément de $\mathbb{U}$.