

Table des matières

1. ARITHMÉTIQUE DES ENTIERS

I. Division

A. Généralités	1
B. Sous-groupes additifs et idéaux de \mathbb{Z}	2

II. PGCD et PPCM

A. Généralités	3
B. Algorithme d'Euclide	4

III. Primalité

A. Nombres premiers entre eux	4
B. Nombres premiers	6

IV. Congruence

A. Généralités	9
B. Structure d'anneau	9
C. Groupe des éléments inversibles	10
D. Cas où n est premier	11

Exercices	14
---------------------	----

Solutions	18
---------------------	----

2. GROUPES

I. Généralités

A. Définitions	27
B. Groupe quotient	31
C. Sous-groupes finis	33
D. Opération de groupe	34

II. Groupe symétrique

A. Premières définitions	38
B. Transpositions	39
C. Signature	40
D. Cycles	41

III. Groupes d'isométries

A. Généralités	44
B. Polygone régulier	46
C. Tétraèdre régulier	47
D. Cube	47

Exercices	48
Solutions	52
3. ANNEAUX	
I. Généralités	61
II. Idéaux	
A. Généralités	65
B. Anneaux principaux	67
C. Entiers quadratiques	71
III. Corps	
A. Corps premier, caractéristique	75
B. Corps des fractions d'un anneau intègre	76
C. Éléments algébriques, éléments transcendants	78
D. Corps \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C}	80
Exercices	83
Solutions	86
4. POLYNÔMES, FRACTIONS	
I. Algèbre des polynômes	95
II. Fonctions polynômes	
A. Définitions	100
B. Racines	100
C. Morphisme	101
D. Polynômes scindés	101
E. Dérivation	103
III. Fractions rationnelles	
A. Généralités	105
B. Décomposition en éléments simples	106
Exercices	110
Solutions	115
5. ALGÈBRE LINÉAIRE	
I. Généralités	
A. Espaces vectoriels	129
B. Sous-espaces vectoriels	130
C. Applications linéaires	131
D. Somme et somme directe	133
E. Projecteurs et symétries	135

F. Espace vectoriel quotient	136
G. Familles génératrices, familles libres, bases	137
H. Théorème du rang ; applications	141
I. Dualité	144
J. Dimension finie	150
K. Notion d'algèbre	152
II. Matrices	
A. Calcul matriciel	154
B. Matrices et applications linéaires	157
C. Décomposition de matrices par blocs	157
D. Opérations élémentaires	158
E. Changement de bases, équivalence, similitude	160
F. Trace	162
III. Déterminants	164
Exercices	169
Solutions	177
6. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES	
I. Polynômes d'endomorphisme	
A. Généralités	201
B. Théorème de décomposition des noyaux	204
II. Éléments propres	
A. Cas d'un endomorphisme	205
B. Cas d'une matrice	207
C. Polynôme caractéristique	208
D. Compléments	213
III. Réduction en dimension finie	
A. Diagonalisation	217
B. Trigonalisation	225
C. Endomorphismes nilpotents (compléments)	226
Exercices	228
Solutions	232
7. FORMES QUADRATIQUES	
I. Formes quadratiques	
A. Formes bilinéaires symétriques	249

B. Formes quadratiques	250
C. Formes bilinéaires symétriques de signe constant	250
D. Réduction d'une forme quadratique en dimension finie	251
II. Espaces préhilbertiens réels	
A. Produit scalaire	257
B. Orthogonalité	259
C. Projection orthogonale	263
III. Espaces euclidiens	
A. Expressions analytiques	266
B. Isomorphisme canonique	266
C. Adjoint d'un endomorphisme	267
D. Automorphismes orthogonaux	271
E. Endomorphismes symétriques	274
F. Endomorphismes normaux d'un espace euclidien	277
IV. Structure préhilbertienne complexe	
A. Produit scalaire	280
B. Orthogonalité	283
C. Projection orthogonale	285
D. Endomorphismes normaux	286
Exercices	289
Solutions	292
8. GÉOMÉTRIE AFFINE	
I. Espaces affines	
A. Définitions	305
B. Sous-espaces affines	306
C. Barycentres	309
D. Applications affines	310
E. Convexité	313
II. Espaces affines euclidiens	
A. Fonction scalaire de Leibniz	313
B. Rappels dans le triangle	314
C. Représentations analytiques	316
D. Problèmes d'angles et de distances	316
III. Isométries	318
IV. Similitudes planes	320

V. Cercle	325
VI. Coniques du plan affine euclidien	
A. Générations ponctuelles des coniques	327
B. Parabole	327
C. Ellipse	328
D. Hyperbole	329
E. Réduction des courbes planes du second degré	329
Exercices	330
Solutions	333
9. SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES	
I. Suites	
A. Suites réelles	341
B. Suites complexes	346
C. Suites classiques	347
II. Séries	
A. Définitions	349
B. Critère de Cauchy	350
C. Structure d'espace vectoriel	350
D. Séries à termes réels positifs	351
E. Séries alternées	358
F. Convergence absolue	359
G. Sommation des relations de comparaison	360
H. Produit de Cauchy	362
I. Compléments	363
Exercices	367
Solutions	372
10. ESPACES MÉTRIQUES	
I. Définitions	393
II. Limite, continuité	
A. Limite	402
B. Continuité	405
III. Espaces métriques complets	411
IV. Espaces métriques compacts	416
V. Espaces métriques connexes	419

VI. Espaces vectoriels normés

A. Opérations algébriques	422
B. Comparaison des normes	423
C. Relations de comparaison	425
D. Applications linéaires continues	426
E. Applications bilinéaires continues	429
F. Espace vectoriel normé de dimension finie	430
G. Séries vectorielles	432

VII. Espaces vectoriels normés et matrices 437

Exercices	441
----------------------------	-----

Solutions	446
----------------------------	-----

11. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

I. Limite, continuité

A. Limite	459
B. Relations de comparaison	460
C. Procédé d'Aitken	462
D. Continuité	464
E. Fonctions continues par morceaux	466
F. Approximation par des fonctions affines par morceaux	468
G. Approximation par des fonctions polynomiales	469

II. Dérivabilité

A. Généralités	470
B. Fonctions à valeurs réelles	472
C. Opérations	474
D. Classe \mathcal{C}^k	477
E. Développements limités	482
F. Résolution approchée d'une équation numérique	483

III. Quelques fonctions usuelles

A. Réciproques des fonctions trigonométriques	486
B. Fonctions hyperboliques	487
C. Réciproques des fonctions hyperboliques	488

Exercices	489
----------------------------	-----

Solutions	492
----------------------------	-----

12. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

I. Modes de convergence

A. Suites	503
B. Séries	506

II. Permutations de limites

A. Questions de limites	510
B. Intégration	512
C. Dérivation	512
D. Complément - Transformation d'Abel	515

Exercices	517
----------------------------	-----

Solutions	521
----------------------------	-----

13. INTÉGRATION

I. Intégrale sur un segment

A. Construction de l'intégrale	533
B. Propriétés de l'intégrale	536
C. Primitives	538
D. Calcul intégral	541

II. Calcul approché d'une intégrale

A. Présentation	543
B. Interpolation	544
C. Formules de Newton-Côtes	545
D. Méthode de Gauss	546
E. Méthode de Simpson	548
F. Itérations	549
G. Euler-Mac Laurin et méthode de Romberg	550

III. Intégrabilité, convergence

A. Cas des fonctions positives	552
B. Comparaison des fonctions positives	556
C. Cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes	558
D. Intégrale convergente	564

IV. Calcul intégral

A. Changement de variable	565
B. Intégration par parties	566

V. Questions de convergence

A. Normes	567
B. Convergence monotone	569
C. Convergence dominée	570
D. Convergence en moyenne	571

VI. Intégrales dépendant d'un paramètre

A. Continuité	572
B. Classe \mathcal{C}^k	573
C. Exemple de la fonction Γ	574

VII. Transformation de Laplace, de Fourier

A. Transformation de Laplace	575
B. Transformation de Fourier	580

Exercices	583
Solutions	588

14. SÉRIES ENTIÈRES**I. Rayon de convergence**

A. Définition d'une série entière	607
B. Définitions de rayon de convergence	608
C. Détermination pratique du rayon de convergence	609

II. Propriétés de la somme

A. Convergence normale	611
B. Intégration	612
C. Dérivation	613

III. Fonctions développables en série entière

A. Généralités	614
B. Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$	614

IV. Autres développements en série entière

A. Fractions rationnelles	616
B. Un exemple de quotient	616
C. Résolution d'équation différentielle	617

Exercices	618
Solutions	622

15. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

I. Différentiabilité

A. Définitions	635
B. Exemples	636
C. Dérivée selon un vecteur	637
D. Dérivées partielles	638
E. Opérations	638

II. Fonctions continûment différentiables

A. Généralités	640
B. Opérations	641
C. Inégalité des accroissements finis	643
D. Gradient	643

III. Classes supérieures

A. Généralités	644
B. Extremums de fonctions à valeurs réelles	646
C. Inversion	647
D. Théorème des fonctions implicites	648

IV. Intégrales multiples

A. Intégrales doubles sur un compact	650
B. Extension aux intégrales triples	652
C. Cas d'un rectangle quelconque	652
D. Intégrales triples	654

Exercices	655
----------------------------	-----

Solutions	658
----------------------------	-----

16. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Équations différentielles linéaires

A. Généralités	667
B. Équations linéaires scalaires d'ordre 1	668
C. Équations linéaires du premier ordre	669
D. Équations scalaires d'ordre 2	674

II. Équations différentielles non linéaires	680
--	-----

III. Compléments

A. Lemme de Gronwall	681
--------------------------------	-----

B. Entrelacement de Sturm	682
C. Théorème de Cauchy-Lipschitz : une preuve	683
Exercices	687
Solutions	690

17. SÉRIES DE FOURIER

I. Généralités

A. Structure préhilbertienne et extension	705
B. Coefficients de Fourier	706
C. Extension de l'inégalité de Bessel	708
D. Autres périodes	709

II. Problèmes de convergence

A. Convergence en moyenne quadratique	710
B. Convergence ponctuelle	712
Exercices	717
Solutions	721

18. PROBABILITÉS

I. Espaces probabilisés

A. Définitions	735
B. Propriétés des probabilités	736
C. Probabilités conditionnelles, indépendance	738

II. Variables aléatoires réelles

A. Variables aléatoires discrètes	742
B. Variables aléatoires à densité	752
C. Vecteurs aléatoires	755

III. Théorèmes limites

A. Convergence en probabilité	757
B. Convergence en loi	758
C. Convergence presque sûre	760
Exercices	761
Solutions	766