CHAPITRE 1

LES ENSEMBLES

ÉTAPE 1 : ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE

Un **ensemble** est une collection d'objets clairement définis, appelés **éléments** de cet ensemble.

Par exemple, on peut dire l'ensemble des pays du continent africain ou l'ensemble des points d'une droite.

Les ensembles sont notés par des lettres, le plus souvent majuscules.

Les éléments de l'ensemble sont alors énumérés entre accolades { } et séparés par un point-virgule.

Par exemple, l'ensemble des nombres impairs compris (au sens strict) entre 0 et 14 sera noté $A = \{1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13\}$.

Pour dire que le nombre 5 est un élément de l'ensemble A, on utilise le symbole $\in$ qui se lit « **appartient** ». On écrit : $5 \in A$.

Pour dire que 8 n'est pas un élément de A, on écrit : $8 \notin A$.

Quand le nombre des éléments d'un ensemble est très grand ou même infini, on ne peut pas tous les énumérer. Dans ce cas, on donne une propriété de ses éléments qui permet de tous les retrouver.

Par exemple, $d = \{\text{points M tels que } AM = BM\}$ est la médiatrice du segment [AB].

Enfin, il existe un seul ensemble qui n'a aucun élément et que l'on appelle **ensemble vide**. Il est noté $\emptyset$.

Comme exemple d'ensemble vide on peut donner l'ensemble des personnes qui mesurent plus de 5 m car aucune personne ne mesure plus de 5 m.

EXERCICES

1. Trouvez deux exemples d'ensemble vide.

2. Écrivez les ensembles suivants en listant entre accolades leurs éléments.

   $A = \{\text{Lettres du mot "MATHEMATIQUES"}\}$.
   $B = \{\text{Nombres entiers compris strictement entre 12 et 17}\}$.
   $C = \{\text{Nombres impairs compris strictement entre 23 et 34}\}$.
   $D = \left\{\text{Nombres entiers compris strictement entre } \frac{5}{3} \text{ et } \frac{47}{7}\right\}$.
   $E = \{\text{Nombres entiers naturels qui divisent 24 }\}$
   $F = \{x \text{ nombre entier tel que } 4 < x < 10\ \}$.
   $G = \left\{x \text{ tel que } x \text{ est un entier divisible par 3 et } -\frac{16}{5} \leq x \leq \frac{89}{9}\right\}$

3. Définir les ensembles suivants en donnant une propriété qui permet de comprendre quels sont ses éléments.

   $A = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}\right\}$
   $B = \left\{\frac{2}{5}; \frac{2}{7}; \frac{2}{9}; \frac{2}{11}; \frac{2}{13}\right\}$
   $C = \{\text{février, juin, mars, janvier, avril, mai}\}$.
   $D = \{16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80\}$.

4. Soit $P = \{3;\ 5;\ 6;\ 9;\ 11\}$ et $Q = \{1;\ 3;\ 7;\ 8;\ 10\}$.
   Complétez par $\in$, $\notin$, P ou Q :

5 ... P	8 ... P	1 ... P	$6 \in$ ...
11 ... Q	$9 \in$ ...	58 ... P	$10 \notin$ ...

ÉTAPE 2 : SOUS-ENSEMBLES

Si tous les éléments d'un ensemble E sont aussi des éléments d'un ensemble F, on dit que E est un **sous-ensemble** de F ou une **partie** de F. On écrit $E \subset F$ et on lit « E est inclus dans F ».

Si E n'est pas un sous-ensemble de F (c'est-à-dire si E a au moins un élément qui n'appartient pas à F), on écrit $E \not\subset F$ et on lit « E n'est pas inclus dans F ».

Considérons, par exemple, les ensembles $R = \{1; 3; 5; 7\}$, et $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. $R \subset S$, mais $S \not\subset R$ car $2 \in S$ alors que $2 \notin R$.

L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E : $\emptyset \subset E$, et chaque ensemble est inclus dans lui-même : $E \subset E$.

Attention, les symboles $\in$ et $\notin$ se trouvent entre un élément et un ensemble alors que les symboles $\subset$ et $\not\subset$ se trouvent entre deux ensembles.

EXERCICES

5. On donne les trois ensembles :

   $K = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $L = \{d, f, h, j, k, p\}$, $M = \{b, f, h, p, s, w\}$.
   Recopiez et complétez par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

f ... L	$\{f\}$ ... L	M…K
$\emptyset$…M	L…L	$\{s, h\}$…M

6. On considère les ensembles suivants :

   $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
   $B = \{\text{multiples de 3 compris entre 1 et 10}\}$
   $C = \{2; 3; 4; 5.6; 7; 8; 9\}$

   Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ et $\not\subset$.

0 ... A	A ... B	B ... C	12 ... B
6 ... B	A ... C	1 ... C	C ... A

7. A, B et C désignent les ensembles de l'exercice précédent.
   Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :
   a) Si un nombre appartient à A, alors ce nombre appartient à B.
   b) Si un nombre appartient à B, alors ce nombre appartient à A.
   c) Si un nombre appartient à A, alors ce nombre appartient à C.
   d) Si un nombre appartient à C, alors ce nombre appartient à A.
   e) Si un nombre appartient à B, alors ce nombre appartient à C.
   f) Si un nombre appartient à C, alors ce nombre appartient à B.

CHAPITRE 2

PROPOSITIONS MATHÉMATIQUES

Un **énoncé mathématique** est une phrases qui a pour but de définir des objets mathématiques ou bien d'en donner des propriétés.

Voici des exemples d'énoncés :

- Le nombre 3 est un entier positif
- Il existe un entier naturel plus grand que 2^{1000}
- Soit *x* un nombre positif
- Posons $a = 2^{10} - 1$
- L'ensemble des nombres compris (au sens large) entre 0 et 1 est l'intervalle $[0; 1]$
- 2 est inférieur ou égal à 5 sera noté : $2 \leq 5$

Certains énoncés sont des **affirmations ou des propositions** : ce sont les 1er et 2e énoncés. D'autres **définissent et nomment** un nouvel objet : les 5e et 6e énoncés.
Enfin, il y a des énoncés, comme le 3e ou le 4e, qui indiquent que l'on va désigner par un certain symbole un objet déjà existant. Ce sont des **notations**.

Une proposition mathématique admet une valeur de vérité. Elle est soit vraie, soit fausse. Les mathématiques reposent sur le principe du tiers exclu : il est impossible qu'une proposition mathématique soit à la fois vraie et fausse.

Par exemple, « $2 + 2 = 4$ » est une proposition vraie,
« Tous les chats sont gris » est une proposition fausse,
« *x* est un nombre impair » dépend de la valeur de *x*. Nous ne pouvons donc pas décider si cette proposition est vraie ou fausse sans avoir plus d'informations.

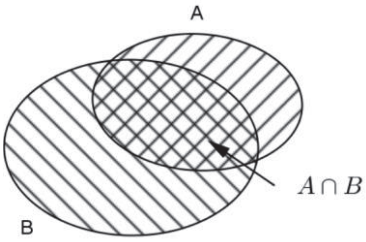
ÉTAPE 1 : ET/OU

Nous pouvons élaborer des énoncés en utilisant les mots du langage courant « ET » et « OU ». Comme ils relient des énoncés, on les appelle des **connecteurs**.

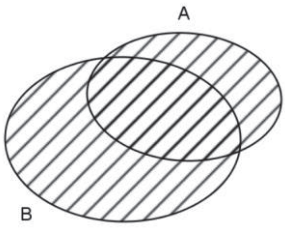
La proposition « mon chien est noir ET le chien de Paul est blanc » est vraie si je possède un chien noir et si Paul en possède un blanc. Elle sera fausse dans tous les autres cas.

La proposition « Paul pratique la natation OU la musculation » est vraie si Paul pratique au moins l'un des deux sports (il peut pratiquer les deux). Le mot « OU » a un sens inclusif en mathématiques.

Soit A et B deux ensembles. L'**intersection** de A et de B, notée $A \cap B$ (se lit « A inter B »), est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.



La **réunion** de A et B, notée $A \cup B$ (se lit « A union B »), est l'ensemble des éléments qui appartiennent soit à A, soit à B, soit aux deux.



Le mot « ET » est associé à l'intersection de deux ensembles et le mot « OU » à la réunion de deux ensembles.

EXERCICES

1. Sur le menu du restaurant scolaire, il est écrit : fromage ou yaourt. Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

2. Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.

   a) Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
   b) Les deux phrases suivantes : « tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse » et « tous les élèves qui suivent l'option théâtre et tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

3. Un club sportif propose des cours de judo et des cours de karaté. On note :
   A le groupe des adhérents inscrits au judo.
   B le groupe des adhérents inscrits au karaté.
   C le groupe des adhérents inscrits au judo et au karaté.
   D le groupe des adhérents inscrits au judo ou (au sens inclusif) au karaté.
   E le groupe des adhérents inscrits à un seul de ces deux sports.
   Farid s'est inscrit uniquement au karaté, Katia uniquement au judo, et Léo s'est inscrit aux deux cours.

   a) De quels groupes A, B, C, D ou E chacun fait-il partie ?
   b) Myriam est dans le groupe D. Fait-elle partie du groupe des adhérents inscrits au judo ?

4. Un sac contient 100 jetons de différentes formes et couleurs. Parmi ceux-ci, 40 sont ronds, 60 sont bleus et 25 sont ronds et bleus. Combien y en a-t-il qui sont :

   a) Ronds sans être bleus ?
   b) Bleus sans être ronds ?
   c) Ni rond ni bleu ?

5. On considère tous les nombres entiers de 1 à 50 compris.
   Parmi ces nombres, écrire :
   L'ensemble A de ceux qui sont multiples de 9 et multiples de 2.
   L'ensemble B de ceux qui sont carrés parfaits et multiples de 9.
   L'ensemble C de ceux qui sont carrés parfaits ou multiples de 9.

6. Compléter par l'une des conjonctions : « et », « ou ».
   $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ …… $y = 0$.
   $xy \neq 0$ équivaut à $x \neq 0$ …… $y \neq 0$.
   $x^2 = 100$ donc $x = 10$ …… $x = -10$.
   $4 < x < 9$ donc $x > 4$ …… $x < 9$.
   Les solutions de $(x - 4)(x + 1) = 0$ sont 4 …… -1.
   « ABCD est un parallélogramme » équivaut à « [AB] et [CD] sont parallèles …… égaux ».
   ABCD est un trapèze donc $(AB)//(CD)$ …… $(AD)//(BC)$.

ÉTAPE 2 : LES QUANTIFICATEURS EN MATHÉMATIQUES

Considérons l'énoncé « $x^2 = 1$ », dépendant de la variable *x*.
Sans autre précision, cet énoncé peut paraître ambigu.

En effet, les phrases suivantes n'ont pas la même signification :
« Quel que soit le nombre *x*, $x^2 = 1$ ».
« Il existe un nombre *x* tel que $x^2 = 1$ ».
« Il existe un unique nombre *x* tel que $x^2 = 1$ ».

Pour exprimer la quantification, c'est-à-dire la quantité d'objets (aucun, certains, tous) pour lesquels un énoncé est vrai, on utilise souvent en mathématiques, deux expressions « quel que soit » (on utilise aussi « pour tout ») et « il existe ». Ce sont des **quantificateurs.**

Les expressions « pour tout » ou « quel que soit » signifient qu'il n'existe aucune exception.

Par exemple, l'énoncé « pour tout réel *x*, $x^2 > 0$ » est faux car il existe une valeur de *x* pour laquelle l'énoncé est incorrect. C'est lorsque $x = 0$.

L'expression « il existe » signifie que l'on peut trouver au moins un cas (peut-être un seul, mais pas forcément !) pour lequel l'énoncé est vrai.

Ainsi, « il existe un réel *x* tel que $x + 2 < 0$ » est vrai (même si en fait il existe une infinité de valeurs de *x* pour lesquelles $x + 2 < 0$!).