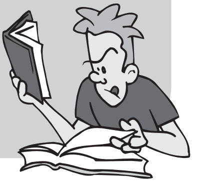
1 COMMENT DÉTERMINER LE NOMBRE D'ÉLÉMENTS D'UN ENSEMBLE CONSTRUIT À PARTIR D'AUTRES ENSEMBLES ?



Définition

Soit E un ensemble ayant un nombre fini d'éléments. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E, noté $\#E$ ou $card\left(E\right)$.

Principe additif

Propriété Soit A et B deux parties de E, alors $\#\left(A\cup B\right)=\#A+\#B-\#\left(A\cap B\right)$.

Exemple

Un lycée compte 53 enseignants selon la répartition ci-dessous.

Enseignants	Mathématiques	Autres disciplines	Total
Femmes	3		30
Hommes			
Total	5		53

En ajoutant 30 et 5 les enseignantes de mathématiques sont comptabilisées deux fois. Ainsi 30 + 5 – 3 = 32 est le nombre d'enseignants qui sont soit des femmes, soit enseignent les mathématiques.

Propriété

Soit A_1, A_2, …, A_n une famille de parties de E deux à deux disjointes (c'est-à-dire que si $i\neq j$ alors $A_i\cap A_j=\varnothing$) alors $\#\left(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right)=\#A_1+\#A_2+\ldots+\#A_n$

Exemple

Cette propriété permet de remplir facilement par addition et soustraction le reste du tableau ci-dessus. En effet l'ensemble des enseignants féminins et celui des enseignants masculins sont disjoints. Il en est de même pour les enseignants de mathématiques et les autres.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 1.1 (3 points) 3 min

Automatismes

1. Que renvoie l'algorithme suivant écrit en langage naturel ?

```
u ← 2
Pour k de 1 à n
   u ← 3u + 2
FinPour
Renvoyer u
```

2. Le point A(–1 ;2) appartient-il à la droite d'équation $2x+3y-1=0$.
3. Résoudre l'équation $x^2+x+1=0$.

Exercice 1.2 (6 points) 5 min

À l'entrée en Cinquième, les élèves choisissent une deuxième langue vivante obligatoire entre Allemand et Espagnol. Ils peuvent choisir une option facultative en Art Plastique ou Musique.

23 élèves étudient l'Allemand, 19 étudient la musique, 28 l'Art Plastique. De plus, 2 élèves inscrits en musique et 9 en Art Plastique étudient l'Allemand. 13 élèves qui étudient l'Espagnol sont sans option.

À l'aide d'un tableau à double entrée, indiquer la répartition des élèves par langue et option, ainsi que le nombre total d'élèves en Cinquième de ce collège.

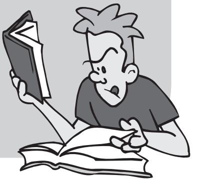
Exercice 1.3 (6 points) 5 min

Dans une ville de 20 000 habitants, une enquête est menée pour prospecter sur les habitudes écoresponsables. À la question « Triez-vous vos déchets ? »

- 4 000 personnes de moins de 35 ans ont répondu « Oui », contre moitié moins « Non ».
- 6 000 personnes entre 35 et 50 ans ont répondu « Oui », contre le tiers « Non ».
- Les plus de 50 ans sont répartis équitablement sur les deux réponses.

Quelles sont les propositions des trois tranches d'âge moins de 35 ans, entre 35 et 50 ans, plus de 50 ans ?

2 QU'EST-CE QU'UN PRODUIT CARTÉSIEN ?



◗ Définition

Soit E et F deux ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble noté $E \times F$ composé des couples $\left(x, y\right)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

◗ Propriété

Si E et F sont des ensembles finis alors $E \times F$ est fini et $\#\left(E \times F\right) = \#E \times \#F$.

Exemple

Dans un self, pour le plat principal on peut choisir entre :

Une côte de porc et une truite : 2 choix possibles ;

Des pâtes, de la ratatouille ou des frites : 3 choix possibles d'accompagnement.

On peut alors composer $2 \times 3 = 6$ assiettes différentes.

◗ Définition

Soit E_1, E_2...E_k des ensembles. On appelle produit cartésien de E_1, E_2...E_k l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots . \times E_k$ composé des couples $\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ et $x_k \in E_k$.

◗ Propriété

Si pour tout entier i, E_i sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \ldots . \times E_k$ est fini et $\#\left(E_1 \times E_2 \times \ldots . \times E_k\right) = \#E_1 \times \#E_2 \times \ldots . \times \#E_k$.

Exemple

Dans une carte au restaurant, on peut composer son menu avec :

- 8 choix possibles d'entrée ;
- 2 choix de plat principal ;
- 5 choix de dessert ;

On peut alors composer $8 \times 2 \times 5 = 80$ menus possibles.

Si on considère un ensemble E à n éléments, former une liste de k éléments de E revient à faire le produit cartésien de E par lui-même k fois. Ainsi :

◗ Propriété

Il existe n^k k-uplets d'un ensemble à n éléments.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 2.1 (3 points) 3 min

Automatismes

1. Quelle est la fonction dérivée de la fonction $f(x)=2x^2+3x-1$ définie sur $\mathbb{R}$?
2. Comment compléter l'algorithme suivant pour déterminer le premier entier n à partir duquel u dépasse 10 000 ?

```
def seuil():
    u=2
    n=0
    while .......:
        n=n+1
        u=3u+2
    return n
```

3. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(1\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 2.2 (3 points) 6 min

À l'entrée d'un immeuble un digicode comporte 10 chiffres et 3 lettres.

1. Combien de codes à 5 caractères peut-on former quels que soient le nombre de lettres et leur emplacement ?
2. Combien de codes à 4 chiffres suivis d'une lettre peut-on former ?
3. Combien de codes à 3 chiffres suivis de 2 lettres peut-on former ?

Exercice 2.3 (2 points) 4 min

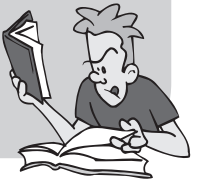
On dispose de plusieurs dés dont les faces sont marquées à partir de 1.

1. On lance les 3 dés cubiques rouge, bleu et jaune. On note dans l'ordre le résultat obtenu sur le dé rouge, puis bleu et enfin jaune. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. On lance 5 dés : les 3 précédents suivis d'un blanc tétraédrique et un noir octaédrique. On note dans l'ordre des couleurs ci-dessous le résultat obtenu. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

Exercice 2.4 (1 point) 2 min

En informatique, les données sont codées sur 64 bits. Chaque bit est soit un 0 soit un 1. Combien de mots de 64 bits différents peut-on former ?

3 QUEL EST LE NOMBRE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE À *N* ÉLÉMENTS ?



En informatique, l'information est codée à l'aide d'une succession de 0 et de 1. Un octet correspond à un 8-uplet de l'ensemble $\{0\,;\,1\}$. Il y a donc $2^8 = 244$ octets différents.

Soit E un ensemble à n éléments notés $x_1, x_2, ..., x_n$. Former une partie A de E consiste à décider pour chaque élément x_i si on le sélectionne dans la partie A ou non. En considérant la sélection comme un succès codé par 1, former une partie A revient à construire un n-uplet de 0 et de 1 : le chiffre de la position i indique si l'élément x_i est dans A ou non. On a donc 2^n choix possibles.

◗ Théorème

> Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n.

◗ Algorithme

Soit E un ensemble à n éléments notés $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pour générer toutes les parties à 2 éléments de E il suffit de former toutes les combinaisons de deux indices différents. On commence par fixer le premier à 1 et on parcourt toute la liste des indices consécutifs. On obtient les paires : $(1,2), (1,4), (1,5), ..., (1,n)$.

Puis on fixe le premier à 2 et on parcourt la liste des indices consécutifs. On obtient les paires $(2,3), (2,4), ..., (2,n)$.

On continue à décaler le premier indice en parcourant ensuite tous les indices consécutifs jusqu'au couple $(n-1, n)$.

Si l'ensemble E est donné sous forme d'une liste, il suffit d'appeler les termes d'indice i et j pour chaque paire (i, j) formée précédemment.

Langage naturel	**Langage Python** **Attention : les indices des listes commencent à 0.**

deuxelements(E)
   n ⟵ longueur(E)
parties ⟵ [ ]
pour i de 1 à n–1
   pour j de i +1 à n
      parties ⟵ parties + [[E[i],E[j]]]
return parties
	`def deuxelements(E):`
	`    n=len(E)`
	`    parties=[]`
	`    for i in range(n-1):`
	`        for j in range(i+1,n):`
	`            parties=parties+[[E[i],E[j]]]`
	`    return parties`

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 3.1 (3 points) 3 min

Automatismes

1. Soit u une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Quelle est l'expression de la fonction dérivée de $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
3. Comment modifier l'algorithme suivant pour déterminer le premier entier n à partir duquel u dépasse une valeur M donnée en entrée ?

```
def seuil():
    u=2
    n=0
    while u<10000:
        u=3u+2
        n=n+1
    return n
```

Exercice 3.2 (5 points) 10 min

1. Un automate est une machine qui exécute des actions à partir de commandes codées par des mots construits sur un alphabet. On s'intéresse à un automate dont les mots sont composés à partir d'un alphabet à deux lettres a et b. Par exemple, *aba* ou *aabab*.
   a. Combien de mots de 3 lettres exactement peut-on former ?
   b. Combien de mots de 5 lettres exactement peut-on former ?
   c. Combien de mots d'au plus 5 lettres peut-on former ?
2. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves. Les issues de ce schéma sont codées par un n-uplet composé de 0 pour les échecs et de 1 pour les succès. Combien y a-t-il d'issues ?

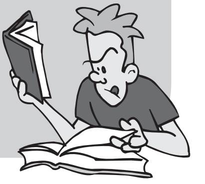
Exercice 3.3 (3 points) 5 min

Si E est un ensemble à n éléments, combien y a-t-il de couples (X,Y) de parties de E telles que $X \subset Y$?

Exercice 3.4 (5 points) 10 min

En vous inspirant de la méthode pour générer toutes les parties à 2 éléments d'un ensemble E de n éléments, écrire un algorithme permettant de générer toutes les parties à 3 éléments de E.

4 QU'EST-CE QU'UNE PERMUTATION D'UN ENSEMBLE FINI ?



Soit E un ensemble de n éléments. Nous avons vu qu'il y a n^k façons de former un k-uplet d'éléments de E. Si on veut former un k-uplet d'éléments tous distincts, on a n choix possibles pour le premier mais seulement $n-1$ choix pour le suivant, $n-2$ choix pour le troisième et ainsi de suite jusqu'à $n-\left(k-1\right)=n-k+1$ choix pour le k-ième élément.

Propriété

> Il y a $n\times\left(n-1\right)\times\left(n-2\right)\times\ldots\times\left(n-k+1\right)=\prod_{i=0}^{k-1}\left(n-i\right)$ k-uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble E à n éléments.

Définition

> Soit n un entier naturel. On définit la factorielle de n par $0!=1$ et $n!=n\times\left(n-1\right)\times\left(n-2\right)\ldots\times 2\times 1$.

Remarque : $n!=n\times\left(n-1\right)!$.

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts peut aussi s'écrire $\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$.

Définition

> On appelle permutation de E un réarrangement de ses éléments, autrement dit un n-uplet de n éléments distincts.

Exemple

Les permutations obtenues à partir de l'ensemble $\left\{1\,;2\,;3\right\}$ sont $\left(1,2,3\right)$, $\left(1,3,2\right)$, $\left(2,1,3\right)$, $\left(2,3,1\right)$, $\left(3,1,2\right)$ et $\left(3,2,1\right)$.

Propriété

> Il y a $n!$ permutations possibles d'un ensemble à n éléments.

TOP CHRONO

C'est l'interro !

Exercice 4.1 (3 points) 3 min

Automatismes

1. Soit A et B deux événements tels que $p(A)=0{,}6$, $p(B)=0{,}5$ et $p(A\cap B)=0{,}1$. Déterminer $p(A\cup B)$.
2. Soit v une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=5$. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Soit A et B deux événements tels que $p(A)=0{,}5$, $p(B)=0{,}4$ et $p(A\cap B)=0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 4.2 (2 points) 5 min

Un club de handball féminin compte 18 joueurs. Une équipe compte 7 joueurs sur le terrain ayant chacun un poste spécifique. Combien d'équipes différentes l'entraîneur peut-il composer ?

Exercice 4.3 (4 points) 5 min

1. Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres ?
2. Parmi ces nombres, combien ont 4 chiffres différents ?

Exercice 4.4 (3 points) 8 min

Un digicode est composé de 9 chiffres de 1 à 9 et des 3 lettres A, B et C. Un code est composé de 3 chiffres suivis d'une lettre.

1. Combien de codes peut-on former ?
2. Combien de codes comportant le chiffre 1 peut-on former ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Exercice 4.5 (2 points) 5 min

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?