

# Table des matières

<b>1. Probabilité et statistique</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.1.1 Expérience, épreuve et événement aléatoires . . . . .	10
1.1.2 Axiomatique de Kolmogorov . . . . .	10
1.1.3 Variable aléatoire . . . . .	11
1.1.4 Echantillon . . . . .	11
1.1.5 Densité (ou loi) de probabilité . . . . .	12
1.1.6 Distribution de probabilité cumulative (fonction de répartition) . . . . .	12
1.1.7 Inverse généralisée d'une fonction de répartition . . . . .	12
1.1.8 Moments, moyenne, variance et quantile . . . . .	13
1.2 Un peu plus sur les probabilités . . . . .	16
1.2.1 Fonction caractéristique d'une densité de probabilité . . . . .	16
1.2.2 Densité de probabilité de plusieurs variables aléatoires . . . . .	16
1.2.3 Probabilité conditionnelle . . . . .	18
1.2.4 Changement de variable aléatoire . . . . .	19
1.2.5 Approximations des moments d'une fonction de variables aléatoires . . . . .	25
1.2.6 Loi de propagation des erreurs . . . . .	26
1.2.7 Inégalité de Bienaymé-Chebyshev-Markov . . . . .	27
1.2.8 Résumé de propriétés des densités de probabilité . . . . .	28
1.3 L'interprétation probabiliste bayésienne . . . . .	29
1.3.1 Le théorème (ou règle) de Bayes . . . . .	29
1.3.2 La probabilité subjective (ou bayésienne) . . . . .	30
1.4 Distributions usuelles à interprétation physique . . . . .	31
1.5 Lois de probabilité discrètes . . . . .	31
1.5.1 Distribution de Bernoulli . . . . .	31
1.5.2 Distribution binomiale . . . . .	33
1.5.3 Distribution géométrique . . . . .	35
1.5.4 Distribution binomiale négative . . . . .	35
1.5.5 Distribution multinomiale . . . . .	36
1.5.6 Distribution hypergéométrique . . . . .	36
1.5.7 Distribution de Poisson . . . . .	37
1.6 Lois de probabilité continues . . . . .	39
1.6.1 Distribution uniforme . . . . .	39
1.6.2 Distributions Gamma et InverseGamma . . . . .	39
1.6.3 Distribution Beta . . . . .	42
1.6.4 Distribution exponentielle . . . . .	43
1.6.5 Distribution de Cauchy et de Breit-Wigner . . . . .	43
1.6.6 Distribution de Maxwell . . . . .	44
1.6.7 Distribution de Moyal . . . . .	45
1.6.8 Distribution de Gauss ou loi normale . . . . .	45

1.6.9	Distribution Log-Normale . . . . .	48
1.6.10	Distribution multinormale . . . . .	48
1.6.11	Distribution binormale . . . . .	50
1.6.12	Contenu probabiliste des lois normale et binormale . . . . .	51
1.6.13	Distribution normale asymétrique . . . . .	52
1.6.14	Distributions de Landau et Crystal Ball . . . . .	53
1.6.15	La famille exponentielle . . . . .	55
1.7	Distributions usuelles à interprétation statistique . . . . .	56
1.7.1	Distribution du $\chi^2$ (centrée) . . . . .	56
1.7.2	Contenu probabiliste de la distribution du $\chi^2$ . . . . .	58
1.7.3	Distribution de Student . . . . .	61
1.7.4	Distribution de Fisher . . . . .	63
1.8	Propriétés asymptotiques . . . . .	64
1.8.1	Relations aux limites entre distributions . . . . .	64
1.8.2	Convergences et Lois des grands nombres . . . . .	65
1.8.3	Théorème de la Limite Centrale . . . . .	69
<b>2.</b>	<b>Statistique et estimation</b> . . . . .	<b>73</b>
2.1	Quelques définitions fondamentales et notions d'erreur . . . . .	73
2.2	Estimation ponctuelle . . . . .	79
2.2.1	Propriétés des estimateurs . . . . .	79
2.2.2	Moyenne et variance empiriques . . . . .	81
2.2.3	Autres estimateurs fiables . . . . .	83
2.2.4	Théorème de Fisher . . . . .	84
2.3	Estimation par intervalle . . . . .	87
2.3.1	Inférence statistique de la moyenne et de la variance pour un échantillon gaussien . . . . .	87
2.3.2	Inférence statistique pour un échantillon poissonien . . . . .	94
2.3.3	Estimation d'un coefficient de corrélation . . . . .	95
2.3.4	Formalisation classique de construction des intervalles de confiance et cas asymptotique . . . . .	96
2.4	Estimation fonctionnelle . . . . .	97
2.5	Estimateurs ponctuels bayésiens . . . . .	106
2.6	Les méthodes d'estimation par rééchantillonnage . . . . .	120
<b>3.</b>	<b>Fonction et méthode de vraisemblance</b> . . . . .	<b>127</b>
3.1	Introduction . . . . .	127
3.1.1	Fonction de vraisemblance . . . . .	127
3.1.2	Fonction de score et information de Fisher . . . . .	128
3.2	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	131
3.2.1	Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance . . . . .	132
3.2.2	Loi et variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance . . . . .	133
3.3	Approximation quadratique et représentation graphique . . . . .	139
3.3.1	Cas à un paramètre . . . . .	139
3.3.2	Cas à 2 paramètres . . . . .	140
3.3.3	Cas général multiparamétrique . . . . .	144
3.4	La statistique du rapport de vraisemblance . . . . .	145
3.5	Approximation de la densité de l'EMV . . . . .	146
3.6	Variétés de fonction de vraisemblance . . . . .	148
3.6.1	Fonctions de vraisemblance marginale et conditionnelle . . . . .	148
3.6.2	Fonction de vraisemblance estimée . . . . .	150
3.6.3	Fonction de vraisemblance étendue . . . . .	150

3.7	Fonction de vraisemblance profilée . . . . .	154
3.8	Vraisemblance et paramètres avec contrainte . . . . .	168
3.9	Extension de la vraisemblance empirique . . . . .	169
3.10	Vraisemblance et inférence bayésienne . . . . .	173
3.10.1	Fonction de vraisemblance et inférence bayésienne . . . . .	173
3.10.2	Extension prédictive bayésienne . . . . .	175
<b>4.</b>	<b>Intervalles de confiance</b>	<b>177</b>
4.1	Introduction . . . . .	177
4.2	Intervalle de confiance (cas fréquentiste) . . . . .	178
4.2.1	Définition . . . . .	178
4.2.2	Couverture probabiliste . . . . .	179
4.2.3	Intervalle de confiance exact par la méthode du pivot . . . . .	180
4.2.4	Construction de Neyman d'une bande de confiance . . . . .	188
4.2.5	Intervalle de confiance par inversion de test . . . . .	199
4.3	Intervalle de crédibilité (cas bayésien) . . . . .	202
4.3.1	Définition . . . . .	202
4.3.2	Propriétés asymptotiques . . . . .	207
4.3.3	Couverture probabiliste . . . . .	210
4.3.4	Relations entre intervalle de crédibilité et intervalle de confiance . . . . .	212
4.4	Intervalle de confiance/crédibilité pour une quantité bornée . . . . .	213
4.4.1	Intervalle de confiance de Feldman-Cousins (approche unifiée) . . . . .	215
4.4.2	Intervalle de crédibilité avec contrainte (approche bayésienne) . . . . .	221
4.5	Limite supérieure pour un modèle de comptage avec bruit de fond . . . . .	221
4.5.1	Approche classique . . . . .	221
4.5.2	Approche bayésienne . . . . .	223
4.6	Intervalles de confiance bootstrap . . . . .	224
4.6.1	Le principe de substitution . . . . .	225
4.6.2	Le rééchantillonnage . . . . .	225
4.6.3	L'algorithme de reconstruction de l'intervalle . . . . .	226
4.6.4	Intervalle de confiance bootstrap d'un échantillon poissonien . . . . .	231
4.6.5	Intervalle de confiance bootstrap d'un rapport de moyennes . . . . .	234
4.6.6	Intervalle de confiance bootstrap par inversion de test et applications . . . . .	237
4.7	Comparaison de méthodes pour la distribution exponentielle $\mathcal{E}$ . . . . .	240
4.8	Intervalles de confiance pour la comparaison de deux proportions . . . . .	244
<b>5.</b>	<b>Tests d'hypothèses</b>	<b>251</b>
5.1	Introduction . . . . .	251
5.2	Définitions et concepts fondamentaux . . . . .	252
5.3	Tests d'hypothèses paramétriques : $H_0$ simple contre $H_1$ simple . . . . .	258
5.4	Tests d'hypothèses paramétriques multiples . . . . .	269
5.4.1	Tests d'hypothèses multiples unilatéraux . . . . .	269
5.4.2	Tests d'hypothèses multiples bilatéraux . . . . .	271
5.4.3	Test du rapport de vraisemblance généralisé . . . . .	271
5.4.4	Tests d'hypothèses multiples d'une loi normale . . . . .	273
5.4.5	Tests d'hypothèses multiples d'une proportion . . . . .	278
5.4.6	Distribution asymptotique du rapport de vraisemblance généralisé . . . . .	279
5.4.7	Tests d'hypothèses multiples d'une loi de Poisson . . . . .	281
5.4.8	Tests d'hypothèses multiples d'une loi normale . . . . .	282
5.4.9	Tests d'hypothèses multiples d'une loi exponentielle . . . . .	284
5.4.10	Tests d'hypothèses multiples d'une loi multinomiale . . . . .	286
5.4.11	Tests paramétriques de comparaison de 2 échantillons gaussiens . . . . .	287

5.4.12	Autres tests d'hypothèses (basés sur la fonction de vraisemblance)	290
5.4.13	Familles paramétriques différentes	298
5.5	Degré de signification et signification	299
5.5.1	Définition et interprétation du degré de signification	301
5.5.2	Définition et interprétation de la signification statistique HEP	312
5.6	Approche bayésienne des tests d'hypothèses	319
5.6.1	La densité prior	319
5.6.2	Le test d'hypothèses bayésien et le facteur de Bayes	331
5.7	Tests d'adéquation à un modèle de loi	344
5.7.1	Tests d'adéquation graphiques	346
5.7.2	Tests d'adéquation simples	348
5.7.3	Tests d'adéquation composés	362
5.7.4	Tests d'ajustement d'un histogramme à une fonction	380
5.7.5	Tests de similarité de deux histogrammes	386
<b>6.</b>	<b>Limites et analyse de physique</b>	<b>395</b>
6.1	Introduction	395
6.2	Tests d'hypothèses	395
6.2.1	Tests sans paramètres de nuisance	395
6.2.2	Tests avec paramètres de nuisance	398
6.3	Rapports de vraisemblance profilée pour l'étude des limites	401
6.4	Notion de p-value et significances observée et attendue	412
6.5	Sensibilité expérimentale : notion de signification médiane attendue	414
6.6	Approximation du troisième ordre	421
6.7	Méthodes $CL_{s+b}$ et $CL_s$ (en physique HEP)	427
6.8	Vers une modélisation réaliste d'une analyse de physique	431
6.8.1	Analyse de forme : Modèle poissonien	432
6.8.2	Analyse de forme : Modèle poissonien avec contraintes	434
6.9	Exemple réel d'une analyse de recherche classique	442
6.9.1	Obtention d'une limite d'exclusion	442
6.9.2	Obtention d'une signification d'observation	445
6.10	Limite bayésienne	448
6.10.1	Principe de calcul d'une limite bayésienne	448
6.10.2	Application : limites bayésiennes pour un modèle poissonien	450
<b>7.</b>	<b>Annexe : Formules utiles et simulation MC</b>	<b>473</b>
7.1	Quelques formules mathématiques utiles	473
7.2	Transformation des variables	474
7.3	Analyse statistique : Nécessités et moyens	476
7.4	Intégration Monte Carlo : Bases et spécificités bayésiennes	478
7.5	Base de la simulation : La méthode d'inversion	479
7.6	Méthodes de simulation avec réalisations indépendantes	483
7.7	Mise en application de l'échantillonnage pour le calcul intégral	485
7.8	Méthodes de simulation avec réalisations dépendantes	488
7.8.1	Chaînes de Markov : Définitions et propriétés	489
7.8.2	Constructions algorithmiques d'une chaîne de Markov ergodique pour la simulation	492
7.8.3	Contingences pratiques et horizon des méthodes de simulation	505
	<b>Bibliographie</b>	<b>511</b>
	<b>Index</b>	<b>523</b>