# Chapitre 1

# Théorie du consommateur

## Sommaire

## 1.1 Le consommateur, cas standard

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$$

Les variables $x$ et $y$ représentent la consommation de deux biens différents. Le revenu de l'agent est noté $R$. Les prix des biens $x$ et $y$ sont notés $p_x$ et $p_y$.
$\alpha$ et $\beta$ sont positifs.

**Question 1** Étudiez les courbes d'indifférence du consommateur et représentez-les dans un repère $(x, y)$.

**Question 2** Rappelez les hypothèses sur les préférences du consommateur standard et associez-les aux caractéristiques graphiques des courbes d'indifférence.

**Question 3** Écrivez le programme du consommateur puis calculez les demandes marshaliennes du consommateur.

**Question 4** Calculez la fonction d'utilité indirecte.

**Question 5** Vérifiez l'identité de Roy pour le bien $x$.

**Question 6** Application numérique : déterminez les demandes marshaliennes et l'utilité atteinte avec :

— $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1/4$

— $R = 16$, $p_x = 2$ et $p_y = 1$.

puis représentez la situation dans un graphique $(x, y)$.

## Correction - Le consommateur - cas standard

**1.** Les courbes d'indifférence se déterminent en isolant un des biens dans la fonction d'utilité. On fixe préalablement un niveau d'utilité $\overline{U}$.
Chaque courbe d'indifférence correspond à un niveau d'utilité différent. C'est pour cela qu'il en existe une infinité.

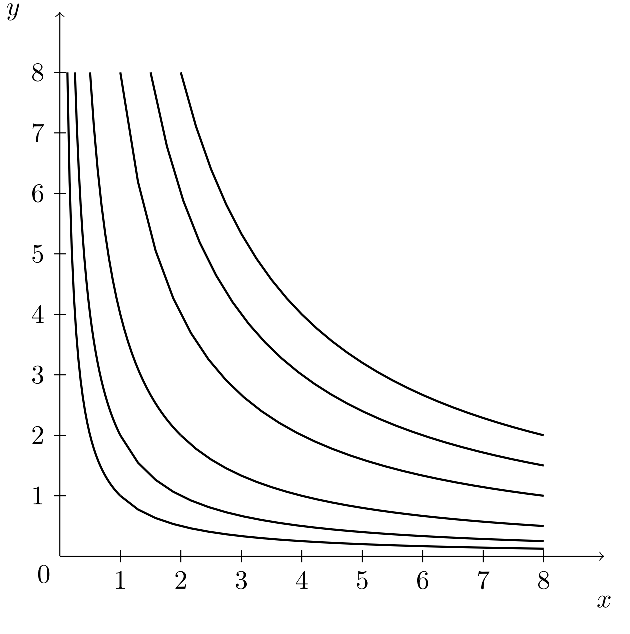
$$\begin{aligned}\overline{U} &= x^{\alpha}y^{\beta}\\ \Leftrightarrow y^{\beta} &= \frac{\overline{U}}{x^{\alpha}}\\ \Leftrightarrow y &= \frac{\overline{U}^{1/\beta}}{x^{\alpha/\beta}}\end{aligned}$$

— $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\overline{U}^{1/\beta}}{x^{\beta/\alpha+1}} < 0$, la courbe d'indifférence est décroissante.

— $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}(\beta/\alpha+1)\dfrac{\overline{U}^{1/\beta}}{x^{\beta/\alpha+2}} > 0$, la courbe d'indifférence est convexe.

— De plus, $\lim_{x\to 0} y = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} = 0$

Une courbe d'indifférence relie l'ensemble des couples $(x, y)$ qui permettent d'atteindre un niveau de satisfaction $\overline{U}$ donné.



**2.** Il existe huit axiomes sur la forme des préférences du consommateur standard. Tous ont une conséquence graphique.

1. *Comportement de maximisation* : le consommateur maximise son utilité. Conséquence graphique : le but est de trouver la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine possible.
2. *Unicité de la relation de préférence* : chaque individu est doté d'une relation de préférence unique. Conséquence graphique : toutes les courbes d'indifférence d'un même consommateur ont les mêmes propriétés (dérivées, limites etc.).
3. *Complétude* : les agents sont capables de comparer et de classer tous les paniers existants. Conséquence graphique : l'ensemble des points du repère $(x, y)$ peut être envisagé et comparé par le consommateur à un autre panier.
4. *Réflexivité des préférences* : les paniers apportant exactement le même niveau de satisfaction au consommateur sont identifiés. Conséquence graphique : l'ensemble de ces paniers constitue une courbe d'indifférence.
5. *Transitivité des préférences* : si un panier 1 est préféré au panier 2, et le panier 2 à un panier 3, alors le panier 1 est préféré au panier 3. Conséquence graphique : deux courbes d'indifférence ne peuvent jamais se croiser.
6. *Continuité des préférences* : il n'y a pas de discontinuité des préférences. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont continues.
7. *Non saturation des préférences* : le consommateur n'est jamais indifférent à une augmentation de consommation. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont asymptotes aux axes pour les valeurs extrêmes.
8. *Convexité des préférences* : le consommateur préfère un panier mélangé. Conséquence graphique : les courbes d'indifférence sont convexes.

**3.** Le programme du consommateur s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} Max\ U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta} \\ sc.\ R = xp_x + yp_y \end{cases}$$

Ce qui signifie que le consommateur cherche à maximiser son utilité mais qu'il doit respecter une contrainte de ressources. On remarque que la fonction d'utilité est censée représenter toutes ses préférences. Autrement dit, le consommateur n'a ici aucun intérêt à conserver une partie de son revenu, puisque l'épargne ne lui procure aucune satisfaction.

**4.** Le lagrangien associé est : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^\alpha y^\beta + \lambda[R - xp_x - yp_y]$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \alpha x^{\alpha-1}y^\beta = \lambda p_x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} = \lambda p_y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} xp_x = \dfrac{\alpha y p_y}{\beta} \\ yp_y = \dfrac{\beta x p_x}{\alpha} \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow R = xp_x + yp_y \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
(1) \to (2) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R = xp_x + \dfrac{\beta x p_x}{\alpha} \\ R = \dfrac{\alpha y p_y}{\beta} + yp_y \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R = xp_x \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} \\ R = yp_y \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^*(R,p_x) = \dfrac{\alpha R}{(\alpha+\beta)p_x} \\ y^*(R,p_y) = \dfrac{\beta R}{(\alpha+\beta)p_y} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On vérifie bien que la consommation de chaque bien est croissante en fonction du revenu (plus l'individu est riche, plus il consommera) et décroissante en fonction de son prix (plus un bien est cher, moins le consommateur peut se permettre d'en acheter, et plus l'autre bien sera attractif comparativement au premier).
Il est utile de connaître ce résultat par cœur : il est commun à toutes les fonctions Cobb-Douglas. Il permet de vérifier ses résultats ou de gagner du temps sur des exercices où plusieurs consommateurs peuvent être à étudier, par exemple dans le cas d'un équilibre général.

**5.** La fonction d'utilité indirecte est la fonction qui permet de déterminer l'utilité atteinte en fonction d'un revenu et d'un système de prix donnés. Pour la déterminer, on injecte dans la fonction d'utilité l'expression des demandes marshaliennes en fonction des prix et du revenu.

$$\begin{aligned}
V(R,p_x,p_y) =& U\left(x^*(R,p_x), y^*(R,p_y)\right) \\
=& \left(\frac{\alpha R}{(\alpha+\beta)p_x}\right)^\alpha \left(\frac{\beta R}{(\alpha+\beta)p_y}\right)^\beta \\
=& \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta} p_x^\alpha p_y^\beta}
\end{aligned}$$

On remarque que cette utilité indirecte est croissante en fonction du revenu (plus le consommateur est riche, plus il pourra atteindre un niveau d'utilité élevé) et décroissante en fonction des prix (plus les prix sont élevés, moins il pourra consommer et moins son niveau d'utilité sera élevé).

**6.** L'identité de Roy est une relation qui permet de retrouver les demandes marshaliennes à partir de la fonction d'utilité indirecte. Son équation pour le bien $x$ est :

$$\begin{aligned}
x^*(R, p_x) &= -\frac{\dfrac{\partial V(\overline{R}, p_x, p_y)}{\partial p_x}}{\dfrac{\partial V(R, p_x, p_y)}{\partial R}} \\
&= -\frac{-\alpha\dfrac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta} p_x^{\alpha+1} p_y^\beta}}{(\alpha+\beta)\dfrac{\alpha^\alpha \beta^\beta R^{\alpha+\beta-1}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta} p_x^\alpha p_y^\beta}} \\
&= \frac{\alpha R}{(\alpha+\beta)p_x} \\
&= x^*(R, p_x)
\end{aligned}$$

L'identité de Roy est bien respectée.

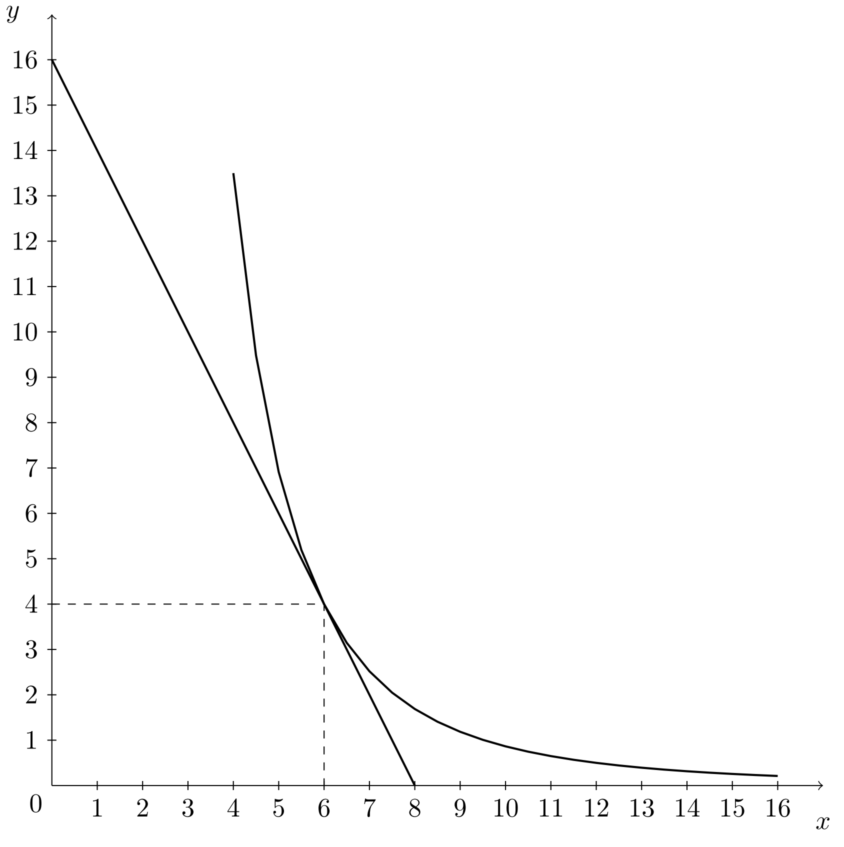
**7.** Application numérique avec :
- $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1/4$
- $R = 16$, $p_x = 2$ et $p_y = 1$.

Les demandes marshaliennes sont :

$$\begin{aligned}
x^*(16, 2) &= \frac{3/4 \cdot 16}{(3/4 + 1/4) \cdot 2} \\
&= 6 \\
y^*(16, 1) &= \frac{1/4 \cdot 16}{(3/4 + 1/4) \cdot 1} \\
&= 4
\end{aligned}$$

L'utilité atteinte est donc :

$$U(6, 4) = 6^{3/4} 4^{1/4} \approx 5,4$$




Le panier optimal choisi par le consommateur est le point $(6, 4)$, point de tangence entre la contrainte budgétaire et la courbe d'indifférence la plus éloignée de l'origine.

## 1.2 La dualité du programme du consommateur

Soit un consommateur dont les préférences sont représentées par la fonction suivante :

$$U(x, y) = x^\alpha (y + \gamma)^\beta$$

où $x$ et $y$ représentent la consommation de deux biens différents. Le revenu de l'agent est noté $R$. Les prix respectifs des biens $x$ et $y$ sont notés $p_x$ et $p_y$.
Ici, $\alpha$ et $\beta$ sont positifs et $\alpha + \beta = 1$.

**Question 1** Calculez les demandes hicksiennes de l'agent.

**Question 2** On suppose désormais et jusqu'à la fin que $\overline{U} \left( \frac{\beta p_x}{\alpha p_y} \right)^\alpha \geq \gamma$. Calculez la fonction de dépense de l'agent.

**Question 3** Rappelez puis vérifiez le lemme de Shephard.

**Question 4** Calculez désormais la fonction d'utilité indirecte de l'agent.

**Question 5** Rappelez l'identité de Roy.

**Question 6** Déterminez les demandes marshaliennes du consommateur.

**Question 7** Schématisez le cheminement que vous venez de parcourir.