Cours complet

1. Définition et notation

Une suite u est une application dont l'ensemble de départ (ensemble des antécédents) est dans l'ensemble des entiers naturels. On note n à la place de x et on note u_n à la place de $u(n)$ ou de $f(x)$.

$$u : n \longmapsto u_n$$

La suite u est donc une suite de termes

$$u_p\,;\, u_{p+1}\,;\, \ldots\,;\, u_{n-1}\,;\, u_n\,;\, u_{n+1}\,;\, \ldots$$

▷ u_p est le premier terme de la suite. Souvent ce sera u_0 ou u_1.
▷ u_n est le terme de rang n de la suite u (image de n par u).
▷ u_{n+1} est le terme de rang $n+1$ ou le terme suivant de u_n.
▷ u_{n-1} est le terme de rang $n-1$ ou le terme précédent de u_n.
▷ La suite de termes u_n, $n \in \mathbb{N}$, se note u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1 – Formule explicite d'une suite

La formule explicite d'une suite u est l'expression de u_n en fonction de n.

Exemples :
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 5n + 3$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

Définition 2 – Formule par récurrence d'une suite

La formule par récurrence d'une suite u est l'expression de u_n en fonction de un ou de plusieurs termes précédents.

Exemples :
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n-1} + 4$ et $u_0 = 1$
▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Méthode 1 – Lecture d'une relation de récurrence

Exemple : On note u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 5$
Pour lire la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 5$, il y a deux possibilités :
▷ : dire : u_{n+1} est égal à deux fois u_n moins 5.
▷ : dire : un terme de la suite est égal à deux fois le terme précédent moins 5.
La deuxième possibilité est bien plus pratique dans les exercices et permet de comprendre la relation qui relie un terme à l'autre et ceci quel que soit le rang auquel on est.
Autre exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
La relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ se lit : un terme de la suite est égal à la somme des deux précédents.

2. Démonstration par récurrence

Les démonstrations par récurrence servent à démontrer qu'une propriété qui dépend de n est vraie ou fausse pour tous les entiers n à partir d'un certain rang. On utilise ce genre de démonstration lorsque la propriété est en fonction d'un ou plusieurs entiers et lorsque la démonstration directe est difficile.
Il faut donc avoir à démontrer toute propriété ressemblant à :

Pour tout entier naturel $n \geq p$, la propriété $\mathbf{P}_n$ est vraie

Méthode 2 – Structure d'une démonstration par récurrence

Pour faire ce type de démonstration on va devoir prouver les deux étapes suivantes :
▷ La propriété est vraie au rang p (initialisation).
▷ Pour un k tel que $p \leq k$, si $\mathbf{P}_k$ est vraie alors $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi. On dit dans ce cas que $\mathbf{P}_n$ a un caractère héréditaire ou que $\mathbf{P}_k$ implique $\mathbf{P}_{k+1}$.
On pourra alors conclure que $\mathbf{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq p$.

En fait cela revient à trouver une méthode pour monter un escalier infini. Pour pouvoir le monter il faut :
▷ Pouvoir monter sur la première marche (Initialisation).
▷ Si on est sur une marche il faut être capable de monter sur la suivante. (Hérédité)

⚠ S'il manque une des deux étapes (initialisation ou hérédité) alors la propriété est fausse.

Exemple :
Soit a un réel positif.
Montrons que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$
On nomme cette inégalité, l'inégalité de **Bernoulli**.
Démonstration par récurrence :
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $(1+a)^n \geq 1+na$, pour $n \in \mathbb{N}$
Initialisation : (Pour $n=0$)
$\left.\begin{array}{l}(1+a)^0 = 1\\ 1+0\times a = 1\end{array}\right\}$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.
$(1+a)^k \geq 1+na$ d'après l'hypothèse de récurrence et comme $1+a>0$ alors

$$(1+a)^k(1+a) \geq (1+na)(1+a) \Leftrightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+a+na+na^2$$
$$\Leftrightarrow (1+a)^{k+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$$

donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Méthode 3 – Démonstration par récurrence

Pour rédiger vos démonstrations par récurrence il faut être rigoureux et bien écrire toutes les étapes.
Voici le squelette de rédaction :
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : ……
Initialisation : (Pour $n = \ldots$)
…
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.
…
Conclusion :

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_p \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\}$ donc …

Exemples :
1) On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n + 3$
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $u_n = -2^n + 3$
Initialisation : (Pour $n = 0$)

$\left.\begin{array}{l}u_0 = 2\\ -2^0 + 3 = -1 + 3 = 2\end{array}\right\}$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.

Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.

$$u_{k+1} = 2u_k - 3 = 2(-2^k + 3) - 3 = -2^{k+1} + 6 - 3 = -2^{k+1} + 3$$

Conclusion :

$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2^n + 3$

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7
Initialisation : (Pour $n = 0$)
$2^{3\times 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 7$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi.
L'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3n} - 1 = 7k$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 2^3 - 1 = (2^{3k} - 1) \times 2^3 + 2^3 - 1 = 7k \times 2^3 - 7 = 7(2^3 k - 1)$$

or $2^3k - 1$ est un entier donc $2^{3(k+1)}$ est un multiple de 7.
On peut donc en déduire que $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie} \\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2^{3n} - 1 \text{ est un multiple de 7.}$$

3. Variations des suites

Définition 3 – Suite croissante

(u_n) est croissante (strictement) si et seulement si :

$$\text{pour tout } n \geq p,\ u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp } u_{n+1} > u_n \text{)}$$

Définition 4 – Suite décroissante

(u_n) est décroissante (strictement) si et seulement si :

$$\text{pour tout } n \geq p,\ u_{n+1} \leq u_n \text{ (resp } u_{n+1} < u_n \text{)}$$

Méthode 4 – Etudier les variations d'une suite

Pour étudier les variations d'une suite il y a plusieurs méthodes possibles.
▷ Déterminer le signe de l'écart entre deux termes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple le signe de $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode fonctionne pratiquement dans la majorité des cas.

▷ Déterminer si lequotient entre deux termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est supérieur ou inférieur à 1. Par exemple le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. L'inconvénient pour cette méthode est qu'il faut avoir des termes de signes constants et non nuls mais dans certains cas la méthode est rapide.

▷ Si la suite est définie de façon explicite alors on peut étudier les variations de la fonction f telle que $u_n = f(n)$. Les variations de la suite sont identiques à celle de la fonction.

▷ Si la suite est définie pas récurrence on peut étudier les variations de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ et faire une démonstration par récurrence pour déterminer les variations.

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Première méthode :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)-\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{n+2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ &=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+2}\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}\\ &=\frac{n+1-(n+2)}{(\sqrt{n+2}\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}=\frac{-1}{(\sqrt{n+2}\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})}<0\end{aligned}$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

Deuxième méthode :
On note $f : x \mapsto 1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ définie et dérivable sur $[0;+\infty[$
$f'(x)=0-\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}<0$ donc f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$
(u_n) est donc strictement décroissante.

2) $u_0=2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{u_n^2+1}$. On montrera que tous les termes sont positifs pour pouvoir étudier les variations de la suite.
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $u_n>0$
Initialisation : (Pour $n=0$)
$u_0=2>0$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi. $u_{k+1}=\frac{u_n}{u_n^2+1}>0$ donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion :

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie}\\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\} \text{donc pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n>0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{u_n^2+1}-u_n=\frac{u_n-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=-\frac{u_n^3}{u_n^2+1}<0$$
donc (u_n) est strictement décroissante.

4. Suites majorées, minorées et bornées

Définition 5 – Suite majorée

Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \le M$$

Définition 6 – Suite minorée

Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq m$$

Définition 7 – Suite bornée

Une suite (u_n) est dite **bornée** s'il existe deux réels M et m tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m \leq u_n \leq M$$

⚠ Si (u_n) est majorée par M alors tous les nombres réels supérieurs à M sont aussi des majorants de cette suite.

⚠ Si (u_n) est minorée par m alors tous les nombres réels inférieurs à m sont aussi des minorants de cette suite.

Méthode 5 – Suites majorées, minorées et bornées

Pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée, on peut utiliser les méthodes suivantes :
▷ Travailler avec des inégalités ou des inéquations.
▷ Faire une démonstration par récurrence.

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on note $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$. Montrer que (u_n) est bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{2n-1}{n} = \frac{2n}{n} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

donc (u_n) est bornée et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$, $u_n \in [1;2[$.

2) On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$
On note $f : x \mapsto \sqrt{x+5}$ définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
On a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
On note $\mathbf{P}_n$ la propriété : $2 \leq u_n \leq 3$
Initialisation : (Pour $n = 0$)
$u_0 = 2 > 0$ donc $\mathbf{P}_0$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $\mathbf{P}_k$ est vraie pour un rang k, montrons que dans ce cas $\mathbf{P}_{k+1}$ l'est aussi. $2 \leq u_n \leq 3$ or f est strictement croissante sur $[2;3]$ donc

$f(2) \leq f(u_n) \leq f(3) \Leftrightarrow \sqrt{7} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{8}$
donc $2 \leq \sqrt{7} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{8} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq u_{n+1} \leq 3$ donc $\mathbf{P}_{k+1}$ est vraie.
Conclusion :

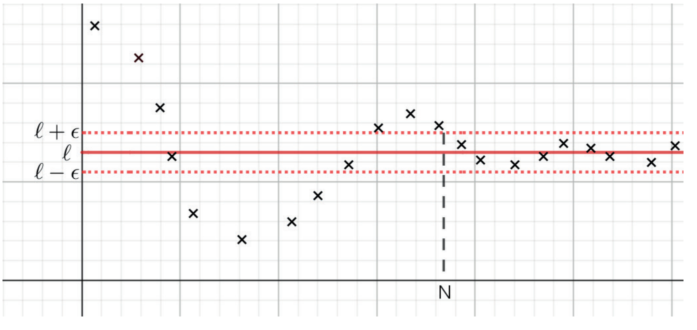
$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{P}_0 \text{ est vraie} \\ \mathbf{P}_k \text{ implique } \mathbf{P}_{k+1}\end{array}\right\} \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n \leq 3$$

5. Limite et convergence d'une suite

Définition 8 – Limite d'une suite vers un réel

On note $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que (u_n) tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ sit tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.
Mathématiquement cela se traduit par :
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in [\ell - \epsilon; \ell + \epsilon] \Leftrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$$



Exemple :
On note u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{n}$
On note $\alpha > 0$ et $I_\alpha =]2-\alpha; 2+\alpha[$ un intervalle ouvert contenant 2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \in I_\alpha \Leftrightarrow 2 - \alpha < 2 - \frac{1}{n} < 2 + \alpha \Leftrightarrow -\alpha < -\frac{1}{n} < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < \alpha \Leftrightarrow n > \frac{1}{\alpha}$$

On note N le premier entier supérieur à $\dfrac{1}{\alpha}$ alors pour tout $n \geq N$, $u_n \in I_\alpha$
donc $|u_n - 2| \leq \alpha$ et ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Propriété 1 – Unicité de la limite

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ alors ℓ est unique.

Démonstration

Cette démonstration n'est pas exigible mais intéressante à comprendre.
Supposons que la suite admette deux limites ℓ_1 et ℓ_2 alors

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell_2$$

Pour tout $\epsilon > 0$

▷ Il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell_1| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

▷ Il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $|u_n - \ell_2| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

On note $N_3 = \text{Max}\{N_1 ; N_2\}$, alors pour tout $n \geq N_3$,

On va utiliser ici l'inégalité triangulaire qui dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ alors

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

ou la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure ou égale à la longueur du troisième côté.

$$\begin{aligned} |\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n + u_n - \ell_2| &\leq |\ell_1 - u_n| + |u_n - \ell_2| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout ϵ même très très petit alors $\ell_1 = \ell_2$.

Définition 9 – Limite d'une suite vers $+\infty$

On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A ; +\infty[$ $(A > 0)$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N.

Exemple :
On note (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = n^2$
Comme $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,
$v_n \in]A; +nfty[\Leftrightarrow n^2 > A$ donc $n > \sqrt{A}$ comme $A > 0$
On note N le plus petit entier au dessus de $\sqrt{A}$ alors pour tout $n \geq N$, $v_n \in]A ; +\infty[$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

⚠ Certaines suites n'ont pas de limite comme par exemple $w_n = (-1)^n$