Chapitre 9

Géométrie analytique dans l'espace

1 Points et vecteurs

Dans tout ce qui suit, on se place dans $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$; repère orthonormé de l'espace.

Questions

1. Lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{u}$, a-t-on forcément $\vec{j} \perp \vec{u}$?

2. Que doit vérifier le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace pour être orthonormé ?

3. Que peut-on dire du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sachant que le point M a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$?

4. Quelles sont les coordonnées du point M lorsque $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$?

5. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur $\vec{u}$?

6. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$?

7. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, que représente alors le réel z pour le vecteur $\vec{u}$?

8. Si M a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$ et M' a pour coordonnées $(a'\,;b'\,;c')$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$?

9. Si M a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$ et M' a pour coordonnées $(a'\,;b'\,;c')$, quelles sont alors les coordonnées du point S le milieu du segment $[MM']$?

Réponses

1. Pas forcément, il se peut par exemple que $\vec{j} = \vec{u}$.

2. $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$ et $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k}$.

3. $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

4. M a pour coordonnées $(a\,;b\,;c)$.

5. $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

6. $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

7. Sa cote.

8. $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix} a'-a \\ b'-b \\ c'-c \end{pmatrix}$.

9. $S\left(\dfrac{a+a'}{2}\,;\dfrac{b+b'}{2}\,;\dfrac{c+c'}{2}\right)$.

10 Que doivent vérifier les réels x ; y ; z ; x' ; y' et z' pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ soient égaux ?

11 Que doivent vérifier les réels x ; y ; z ; x' ; y' et z' pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ soient colinéaires ?

12 Que doivent vérifier les réels x ; y ; z ; x' ; y' et z' pour que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ soient orthogonaux ?

2 Droites

Questions

1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
Est-ce le seul ?

2 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point $P(1;2;3)$.
En déduire un deuxième.

10 $x = x'$ et $y = y'$ et $z = z'$.

11 Il existe un réel k tel que $\vec{u'} = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{u'}$ donc $x' = kx$ et $y' = ky$ et $z' = kz$ ou $x = kx'$ et $y = ky'$ et $z = kz'$.

12 Le produit scalaire $\vec{u'} \cdot \vec{u}$ doit être égal à 0 soit $\vec{u'} \cdot \vec{u} = 0$ donc $xx' + yy' + zz' = 0$.

2 Droites

Réponses

1 $\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Il existe de toute évidence une infinité de systèmes d'équations paramétriques de cette droite vu qu'elle passe par une infinité de points et que tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ lui est directeur.

2 $D: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + k \\ z = 3 \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$

En prenant par exemple $k = 1$, on déduit que le point $A(1;3;3)$ appartient aussi à D.

Un autre système est donc $D: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2u \\ z = 3 \end{cases}$ où $u \in \mathbb{R}$.

3 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont parallèles ?

4 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont confondues ?

5 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont sécantes ?

6 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont non coplanaires ?

7 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont orthogonales ?

8 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont perpendiculaires ?

Soient, pour les questions suivantes, les droites

$$D_1\begin{cases}x=2t-1.\\ y=-2t+3 \text{ où } t\in\mathbb{R}\\ z=-t+2.\end{cases} \text{ et } D_2\begin{cases}x=-3k-1\\ y=k-1 \quad\quad \text{où } k\in\mathbb{R}\\ z=-8k-17\end{cases}$$

Questions

1 Déterminer les coordonnées d'un point A_1 et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de D_1 ainsi que les coordonnées d'un point A_2 et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de D_2.

2 $A(8\,;-4\,;7)$ appartient-il à D_1 ?

3 On démontre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

4 On démontre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et que les coordonnées d'un point de la première droite vérifient le système d'équation de la deuxième.

5 On démontre qu'il existe qu'un seul triplet $(x\,;y\,;z)$ vérifiant les deux systèmes.

6 On démontre qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes.

7 On démontre que le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

8 On démontre que les droites sont à la fois sécantes et orthogonales.

À partir des systèmes d'équations paramétriques des deux droites, on détermine simplement les coordonnées de vecteurs directeurs.

Réponses

1 $A_1(-1;3;2)$ et $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

$A_2(-1;-1;-17)$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-3\\1\\-8\end{pmatrix}$.

2 Existe-t-il un réel t tel que $\begin{cases}2t-1=8\\-2t+3=-4\\-t+2=7\end{cases}$?

Soit $\begin{cases}t=4{,}5\\t=3{,}5\\t=-5\end{cases}$ ce qui est impossible. Donc $A\notin D_1$.

3 $A(8\,;-4\,;7)$ appartient-il à D_2 ?

4 D_1 et D_2 sont-elles parallèles ?

5 D_1 et D_2 sont-elles sécantes ? si tel est le cas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C.

6 D_1 et D_2 sont-elles coplanaires ?

7 D_1 et D_2 sont-elles orthogonales ?

8 D_1 et D_2 sont-elles perpendiculaires ?