

Chapitre 9

Géométrie analytique dans l'espace

1 Points et vecteurs

Dans tout ce qui suit, on se place dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; repère orthonormé de l'espace.



Questions

1

Lorsque $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{u}$, a-t-on forcément $\vec{j} \perp \vec{u}$?

2

Que doit vérifier le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace pour être orthonormé ?

3

Que peut-on dire du vecteur \overline{OM} sachant que le point M a pour coordonnées $(a; b; c)$?

4

Quelles sont les coordonnées du point M lorsque $\overline{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$?

5

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur \vec{u} ?

6

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$?

7

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, que représente alors le réel z pour le vecteur \vec{u} ?

8

Si M a pour coordonnées $(a; b; c)$ et M' a pour coordonnées $(a'; b'; c')$, quelles sont alors les coordonnées du vecteur $\overline{MM'}$?

9

Si M a pour coordonnées $(a; b; c)$ et M' a pour coordonnées $(a'; b'; c')$, quelles sont alors les coordonnées du point S le milieu du segment $[MM']$?

↓ Réponses

1 Pas forcément, il se peut par exemple que $\vec{j} = \vec{u}$.

2 $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$ et $\vec{i} = \vec{j} = \vec{k}$.

3 $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

4 M a pour coordonnées $(a; b; c)$.

5
$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6
$$k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}.$$

7 Sa cote.

8
$$\vec{MM'} \begin{pmatrix} a'-a \\ b'-b \\ c'-c \end{pmatrix}.$$

9
$$S \left(\frac{a+a'}{2}; \frac{b+b'}{2}; \frac{c+c'}{2} \right).$$

- 10 Que doivent vérifier les réels $x ; y ; z ; x' ; y'$ et z' pour que les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ soient égaux ?}$$

- 11 Que doivent vérifier les réels $x ; y ; z ; x' ; y'$ et z' pour que les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ soient colinéaires ?}$$

- 12 Que doivent vérifier les réels $x ; y ; z ; x' ; y'$ et z' pour que les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ soient orthogonaux ?}$$

2 Droites



Questions

- 1 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant

par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.
Est-ce le seul?

- 2 Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point $P(1; 2; 3)$.
En déduire un deuxième.

10

$$x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z' .$$

11

Il existe un réel k tel que $\vec{u}' = k\vec{u}$ ou $\vec{u} = k\vec{u}'$ donc
 $x' = kx$ et $y' = ky$ et $z' = kz$ ou $x = kx'$ et $y = ky'$ et $z = kz'$.

12

Le produit scalaire $\vec{u}' \cdot \vec{u}$ doit être égal à 0 soit $\vec{u}' \cdot \vec{u} = 0$ donc
 $xx' + yy' + zz' = 0$.

2 Droites

↓

Réponses

1

$$\begin{cases} x = x_A + kx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ky_{\vec{u}} \\ z = z_A + kz_{\vec{u}} \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R} .$$

Il existe de toute évidence une infinité de systèmes d'équations paramétriques de cette droite vu qu'elle passe par une infinité de points et que tout vecteur colinéaire à \vec{u} lui est directeur.

2

$$D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + k \\ z = 3 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{R}$$

En prenant par exemple $k=1$, on déduit que le point $A(1;3;3)$ appartient aussi à D .

Un autre système est donc $D : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + 2u \\ z = 3 \end{cases}$ où $u \in \mathbb{R}$.

- 3 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont parallèles ?
- 4 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont confondues ?
- 5 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont sécantes ?
- 6 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont non coplanaires ?
- 7 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont orthogonales ?
- 8 Comment à partir des systèmes d'équations paramétriques de deux droites, peut-on démontrer qu'elles sont perpendiculaires ?

Soient, pour les questions suivantes, les droites

$$D_1 \begin{cases} x = 2t - 1. \\ y = -2t + 3 \text{ où } t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2. \end{cases} \text{ et } D_2 \begin{cases} x = -3k - 1 \\ y = k - 1 \text{ où } k \in \mathbb{R} \\ z = -8k - 17 \end{cases}$$



Questions

- 1 Déterminer les coordonnées d'un point A_1 et d'un vecteur directeur \vec{u}_1 de D_1 ainsi que les coordonnées d'un point A_2 et d'un vecteur directeur \vec{u}_2 de D_2 .
- 2 $A(8; -4; 7)$ appartient-il à D_1 ?

- 3 On démontre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- 4 On démontre que leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et que les coordonnées d'un point de la première droite vérifient le système d'équation de la deuxième.
- 5 On démontre qu'il existe qu'un seul triplet $(x; y; z)$ vérifiant les deux systèmes.
- 6 On démontre qu'elles ne sont ni parallèles ni sécantes.
- 7 On démontre que le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.
- 8 On démontre que les droites sont à la fois sécantes et orthogonales.

À partir des systèmes d'équations paramétriques des deux droites, on détermine simplement les coordonnées de vecteurs directeurs.

↓ Réponses

1 $A_1(-1; 3; 2)$ et $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$A_2(-1; -1; -17)$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

2 Existe-t-il un réel t tel que $\begin{cases} 2t - 1 = 8 \\ -2t + 3 = -4 \\ -t + 2 = 7 \end{cases}$?

Soit $\begin{cases} t = 4,5 \\ t = 3,5 \\ t = -5 \end{cases}$ ce qui est impossible. Donc $A \notin D_1$.

3 $A(8; -4; 7)$ appartient-il à D_2 ?

4 D_1 et D_2 sont-elles parallèles?

5 D_1 et D_2 sont-elles sécantes? si tel est le cas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C .

6 D_1 et D_2 sont-elles coplanaires?

7 D_1 et D_2 sont-elles orthogonales?

8 D_1 et D_2 sont-elles perpendiculaires?