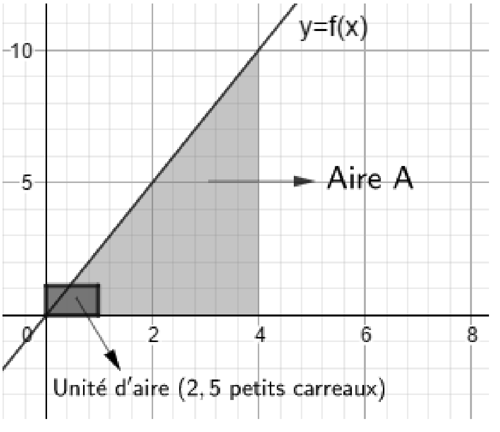
Chapitre 4
METHODES SUR LE CALCUL INTEGRAL ET LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

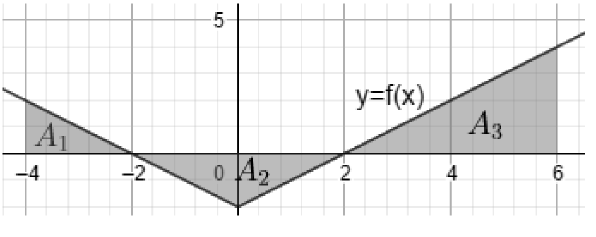
Il va être question dans ce chapitre de calcul intégral et d'équations différentielles dont nous allons donner en introduction quelques notions pour que tout soit bien clair par la suite.

Pour une fonction f continue positive sur un intervalle I, le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unité d'aire définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ comme l'illustre l'exemple suivant :



Sur cet exemple le nombre $\int_0^4 f(x)dx$ est l'aire A en unité d'aire, c'est-à-dire le nombre de rectangles foncés que contient l'aire A ce qui donne $\int_0^4 f(x)dx = \frac{50}{2,5} = 20$ car l'aire A contient 50 petits carreaux.

On généralise cette définition de l'intégrale aux fonctions qui ne sont pas forcément positives sur un intervalle I de la même façon que dans l'exemple suivant :



Sur cet exemple le nombre $\int_{-4}^{6} f(x)dx$ est $A_1 - A_2 + A_3$ où les aires A_1, A_2 et A_3 sont exprimées en unité d'aires.
Comme l'unité d'aire est la même que dans l'exemple précédent, on obtient $A_1 = \frac{5}{2{,}5} = 2$, $A_2 = \frac{10}{2{,}5} = 4$ et $A_3 = \frac{20}{2{,}5} = 8$ exprimées en unité d'aire, ce qui donne finalement $\int_{-4}^{6} f(x)dx = 2 - 4 + 8 = 6$.

REMARQUE : Il existe des fonctions non continues pour lesquelles les définitions précédentes se généralisent (les fonctions en escalier par exemple).

Théorème fondamental du calcul intégral : Pour une fonction f définie et continue sur $\lfloor a,b \rfloor$, $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive de f sur $\lfloor a,b \rfloor$, c'est-à-dire une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ sur $\lfloor a,b \rfloor$.

L'application de ce théorème suppose qu'il va falloir faire l'inverse de ce que l'on fait lorsque l'on dérive une fonction, ce qui s'appelle l'intégrer et fera l'objet de la **première partie,** dans laquelle nous donnerons en outre deux applications de la détermination exacte d'une intégrale (valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle et calcul de la valeur exacte d'une aire entre deux courbes).

La continuité d'une fonction f définie sur $\lfloor a,b \rfloor$ lui assure l'existence d'une primitive F sur $\lfloor a,b \rfloor$, mais F n'est pas toujours exprimable avec les fonctions usuelles, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème fondamental et nécessite donc de dégager des méthodes relatives à d'autres propriétés des intégrales pour les étudier, ce qui fera l'objet de la **seconde partie**.

Dans une **troisième partie** nous étudierons comment donner des approximations d'intégrales en utilisant fréquemment des algorithmes en langage Python.

Enfin, dans une **quatrième partie**, nous verrons des méthodes relatives aux équations différentielles pour lesquelles l'inconnue est par exemple une fonction y de la variable x qui vérifie $y' = 2x$ (1), $y' = y^2$ (2), $y'' + 4y = 0$ (3)…

Comme vous êtes tous des très bons élèves, vous avez tous compris pourquoi cette quatrième partie succède aux précédentes avec l'équation (1) puisqu'il suffit d'intégrer $x \mapsto 2x$ pour trouver une de ses solutions qui est par exemple la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x^2$.

Quant aux équations (2) et (3), les meilleurs d'entre vous ont déjà déterminé une de leurs solutions, mais comme on est bien gentil on propose pour les élèves moins brillants la fonction définie sur $\rfloor 0,+\infty \lfloor$ par $y(x) = -\frac{1}{x}$ pour l'équation (2) et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \sin 2x$ pour l'équation (3).

Quant à trouver toutes les solutions de ces équations et donc de les résoudre, c'est une problématique à laquelle se propose de répondre la quatrième partie dans le cas d'équations différentielles particulières.

1. Méthodes de calcul d'une intégrale avec les tableaux

Les méthodes de ce chapitre font intervenir des tableaux de primitives à connaître par cœur au même titre que les tableaux de dérivées.

METHODE 1 : Comment utiliser le tableau des primitives en « x »

■ **Rappel**
La dérivation étant linéaire, l'intégration l'est aussi.
Ainsi, pour tous réels a et b, et toutes fonctions f et g intégrables sur un intervalle I on a : $\int_I (af(x)+bg(x))dx = a\int_I f(x)dx + b\int_I g(x)dx$.

■ **Principe**
On applique les formules du tableau suivant :

Fonction	Une primitive	Ensemble sur lequel on peut appliquer la formule
$x^p \quad (p \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	Si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}$, sinon sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Avant d'appliquer les formules du tableau, pour intégrer, on vous conseille d'écrire que $\dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$.

Cela donne :

$$\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - 3x^{-2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x - 3\frac{x^{-1}}{-1} + 2 \times 2\sqrt{x} \right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x + \frac{3}{x} + 4\sqrt{x} \right]_1^2 = -\frac{43}{6} + 4\sqrt{2}.$$

METHODE 2 : Comment utiliser le tableau des primitives en « u(x) »

■ Principe

On pose u(x) égale à une expression pour se ramener à utiliser une des formules du tableau suivant :

Fonction	Une primitive	Ensemble sur lequel on peut appliquer la formule
$U(x)^p U'(x)$ $(p \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\dfrac{U(x)^{p+1}}{p+1}$	Si $p \in \mathbb{N}$, sur tout intervalle où U est dérivable, sinon sur tout intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas.
$\dfrac{U'(x)}{U(x)}$	$\ln\lvert U(x)\rvert$	Sur tout intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas.
$\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}$	Sur tout intervalle où U est dérivable et strictement positive.
$U'(x)\sin U(x)$	$-\cos U(x)$	Sur tout intervalle où U est dérivable.
$U'(x)\cos U(x)$	$\sin U(x)$	Sur tout intervalle où U est dérivable.
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$	Sur tout intervalle où U est dérivable.

■ **Exemple :** *Déterminez* $I = \int_{-1}^{1}(4x+2)\left(x^2+x+1\right)^3 dx$.

Posons, $U(x) = x^2 + x + 1$.

Aïe ! $U'(x) = 2x+1$, et ce n'est pas tout à fait $(4x+2)$.

En fait, on a $2U'(x) = 4x+2$ et ce n'était pas si difficile…

Finalement, $I = \int_{-1}^{1} 2U'(x)U^3(x)dx = 2\left[\dfrac{U^4(x)}{4}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{2}\left(U^4(1) - U^4(-1)\right) = 40$.

METHODE 3 : Comment appliquer plus vite la méthode 2 lorsque $U(x) = ax+b$ $\left(a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R}\right)$

■ Principe

On applique le résultat suivant : Si F est une primitive de f sur un intervalle I alors pour tous a et b réels tels que $ax+b \in I$ on a $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)$.

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_{-2}^{-1}\dfrac{1}{2x+1}dx$.

Ici, f est la fonction inverse de $x \mapsto 2x+1$ (qui ne s'annule pas sur $\lfloor -2,-1 \rfloor$).

On a donc $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|$ et donc que $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}\ln 3$.

METHODE 4 : Comment déterminer la valeur moyenne exacte d'une fonction continue sur $[a;b]$ ou en donner une valeur approchée

■ Rappel

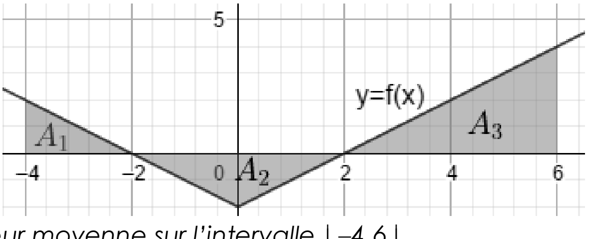
Pour une fonction f continue sur $[a;b]$, sa valeur moyenne μ sur $[a;b]$ est donnée par la formule : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

■ Principe

1) Si on sait intégrer f sur $[a,b]$, on applique la formule précédente et elle donne la valeur exacte de la valeur moyenne μ.
2) Si on ne sait pas intégrer f, mais que l'on connaît son expression on peut construire un algorithme qui donne une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ par une des méthode de la partie 3 puis diviser par $b-a$, **ou bien**, comme on l'a fait dans l'exemple construire un algorithme qui permet de prendre un grand nombre d'images par f de réels différents de l'intervalle $[a,b]$ et en faire la moyenne.
3) Enfin, si l'on dispose d'un graphique sans connaître l'expression de f, on détermine $\int_a^b f(x)dx$ en l'interprétant comme une aire et on divise par $b-a$.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.*

1) Calculez la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.
2) Retrouvez cette valeur avec un algorithme en langage Python.
3) On considère la fonction f dont la représentation graphique est la suivante :



Donnez sa valeur moyenne sur l'intervalle $[-4,6]$.

1) $\mu=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}$.

2) L'idée est de calculer un grand nombre de valeurs prises sur $\lfloor 0;2 \rfloor$ et d'en faire la moyenne.

Pour cela, on vous propose l'algorithme suivant :

```
def f(x):
    return x**2
def moyenne(a,b,n):
    s=f(a)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        u=s/n
    return(u)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> moyenne(0,2,200000)
1.3333233333500334
```

On obtient une valeur approchée de μ très proche de sa valeur exacte qui est $\frac{4}{3}$ (d'après 1)).

3) On a vu en introduction de ce chapitre que $\int_{-4}^{6} f(x)dx = 2-4+8=6$ donc la valeur moyenne μ' demandée est $\mu' = \frac{6}{6-(-4)} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

REMARQUE : Dans cet exemple on obtient la valeur exacte de μ' car le calcul d'aires donne la valeur exacte de l'intégrale.

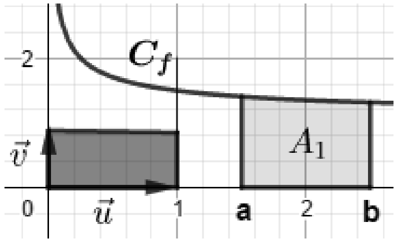
METHODE 5 : Comment calculer une aire

■ Rappels

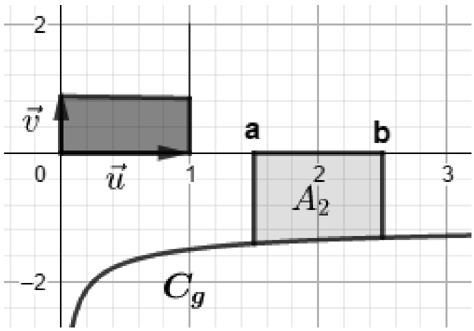
Pour les cas qui vont suivre, on vous rappelle que les aires A1, A2 et A3 sont données en unités d'aires.

Une unité d'aire est l'aire en cm^2 du rectangle de dimensions $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ (gris foncé sur les figures).

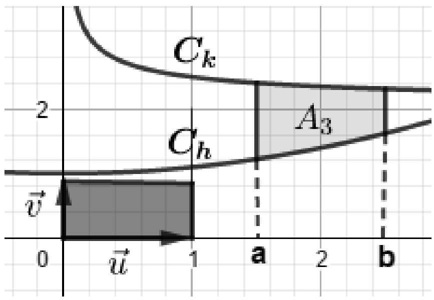
Il suffit de multiplier par l'aire en cm^2 du rectangle de dimensions $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ pour avoir les aires A1, A2, ou A3 en cm^2.



$$A_1 = \int_a^b f(t)dt$$



$$A_2 = -\int_a^b g(t)dt$$



$$A_3 = \int_a^b \left(k(t) - h(t)\right)dt$$

■ Principe

On applique l'une des trois formules précédentes **sans oublier** de multiplier par l'unité d'aire, si on demande l'aire en cm^2 **.**

■ Astuce

Quand on vous demande une aire en cm^2, multipliez dés le départ par l'unité d'aire comme cela vous ne l'oublierez pas à la fin !

■ **Exemple :** *Donnez la valeur exacte des aires A1, A2 et A3 précédentes en cm^2 sachant que :*

$\|\vec{u}\| = 2\,cm$; $\|\vec{v}\| = 1\,cm$; $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$; $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$; $g(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$;

$k(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2$; $h(x) = 0{,}1x^2 + 2$.

L'unité d'aire est de $2\,cm^2$ donc on a :

$$A_1 = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)dx = 2\left[\sqrt{x} + x\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = 2\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2 \ \ cm^2 .$$

Il est clair que $A_2 = A_1$ puisque $g(x) = -f(x)$.

$$A_3 = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right) - \left(0{,}1x^2 + 2\right)\right)dx = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{10}x^2\right)dx = 2\left[\sqrt{x} - \frac{x^3}{30}\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$2\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{125}{240} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{27}{240}\right) = \sqrt{10} - \sqrt{6} - \frac{49}{60} \ \ cm^2 .$$

2. Autres méthodes de détermination d'intégrales

Les méthodes de ce chapitre font intervenir des propriétés des intégrales qui permettent de les déterminer quand les méthodes 1, 2 et 3 ne suffisent pas.

Cependant, elles finissent souvent par se ramener à l'une d'entre elles, mais parfois non, comme le montre les exemples des méthodes 7 et 10.

METHODE 6 : Utiliser une intégration par parties

■ Rappel

Si u et v sont dérivables à **dérivées continues** sur $\lfloor a,b \rfloor$ alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx .$$

REMARQUE : Très souvent u et v sont deux fois dérivables, ce qui assure que les hypothèses du théorème sont satisfaites, puisque si u' et v' sont dérivables elles sont forcément continues. Quand ce sera le cas, on dira que u et v sont deux fois dérivables, donc que l'on peut intégrer par parties.