D. SOLUTIONS DES EXERCICES DU CHAPITRE III

Exercice III.1* — Equilibre d'un aimant

Les conditions d'équilibre du système illustré dans la Fig. EIII.1.2 sont :

- Equilibre de translation $\Rightarrow \sum_i \vec{F_i} = \vec{0}$
- Equilibre de rotation $\Rightarrow \sum_i \vec{\Gamma}_{i/O} = \vec{0}$

Puisque les forces sont toutes dans le même plan, les conditions ci-dessus se réduisent aux trois équations algébriques suivantes :

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i \Gamma_{i/O} = 0$$

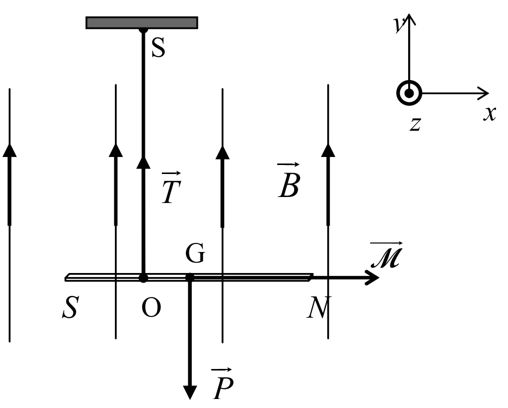

Fig. EIII.1.2

L'aimant est en équilibre sous l'action de trois forces:

- la force de pesanteur, appliquée au centre de gravité G : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$,
- la tension du fil, appliquée au point O : $\vec{T} = T\,\overrightarrow{u_y}$
- la force magnétique de moment $\vec{\Gamma}_{/O} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}\overrightarrow{u_x} \wedge B\overrightarrow{u_y} = \mathcal{M}B\overrightarrow{u_z}$

Par conséquent, la condition d'équilibre peut s'écrire :

- **Equilibre de translation** $\Rightarrow \sum_i \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_i F_{xi}\overrightarrow{u_x} + \sum_i F_{yi}\overrightarrow{u_y} = \vec{0}$

  D'où : $(T-P)\overrightarrow{u_y} = \vec{0} \Rightarrow T = P = mg$

- **Equilibre de rotation** $\Rightarrow \sum_i \overrightarrow{\Gamma_{i/O}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Gamma}_{P/O} + \vec{\Gamma}_{T/O} + \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

  La tension du fil est une force qui s'appuie sur l'axe de rotation Oz, son moment est nul, c.à.d. : $\vec{\Gamma}_{T/O} = \vec{0}$

  Par ailleurs, on a :

$$\vec{\Gamma}_{P/O} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = x\overrightarrow{u_x} \wedge (-mg)\,\overrightarrow{u_y} = -m\,g\,x\,\overrightarrow{u_z}$$

et : $\overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M} B \overrightarrow{u_z}$

Par conséquent,

$$\left(\mathcal{M} B - m\,g\,x\right) \overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

L'aimant reste donc en équilibre horizontal pour :

$$x = \frac{\mathcal{M} B}{m\,g}$$

Exercice III.2** — Oscillation d'une aiguille aimantée dans un champ magnétique uniforme

1. L'aiguille aimantée, de moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\left(\cos\theta \overrightarrow{u_x} + \sin\theta \overrightarrow{u_y}\right)$ est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\,\overrightarrow{u_x}$.

L'action de ce champ sur l'aiguille aimantée se résume à :

- une résultante des forces $\vec{R} = \vec{0}$;
- un couple de moment :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}\left(\cos\theta \overrightarrow{u_x} + \sin\theta \overrightarrow{u_y}\right) \wedge B_0\,\overrightarrow{u_x} \\ &= -\mathcal{M}\, B_0 \sin\theta \overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

Il n'y a pas de mouvement de translation de l'aiguille aimantée. Par contre, il y a une rotation du dipôle magnétique autour de l'axe z. Le dipôle magnétique s'oriente donc dans la direction du champ magnétique.

2. L'aiguille aimantée étant placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, elle acquiert une énergie potentielle :

$$\begin{aligned}E_p &= -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = \mathcal{M}\left(\cos\theta \overrightarrow{u_x} + \sin\theta \overrightarrow{u_y}\right) \cdot B_0\,\overrightarrow{u_x} \\ &= -\mathcal{M}\ B_0\ \cos\theta\end{aligned}$$

3. L'équilibre de l'aiguille aimantée impose :

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = \mathcal{M}\ B \sin\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad sin\,\theta = 0$$

On en déduit que:

- L'énergie potentielle est minimale ($Ep_{min} = -\mathcal{M}\ B$) lorsque l'aiguille aimantée est alignée avec le champ magnétique $\vec{B}$ ($\theta = 0$): il s'agit d'un ***équilibre stable***.
- L'énergie potentielle est maximale ($Ep_{max} = \mathcal{M}\ B$) lorsque l'aiguille aimantée fait un angle de 180° avec le champ $\vec{B}$ ($\theta = \pi$): il s'agit dans ce cas d'un ***équilibre instable***.

La position d'équilibre est telle que l'axe de l'aiguille aimantée soit parallèle au champ.

4. Appliquons au mouvement de l'aiguille aimantée la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation. Si J désigne le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation, la R.F.D. du solide en rotation peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\vec{\Gamma} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_z}$$

En projetant cette relation sur l'axe z, on obtient :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M}\, B_0 \sin\theta$$

Bien que cette équation différentielle ne soit pas, en général, linéaire, nous pouvons utiliser une expansion binomiale pour montrer que, pour des élongations angulaires petites θ << 1, l'équation différentielle est linéaire et que, par conséquent, le mouvement de l'aiguille aimantée est un mouvement harmonique simple. Ainsi dans le cas d'oscillations de faible amplitude θ_m, on peut écrire :

$$\sin\theta \approx \theta(radian) \quad \text{avec} \quad \theta << 1$$

Par suite :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathcal{M}\, B_0\,\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}\, B_0}{J}\theta = 0$$

En posant : $\dfrac{\mathcal{M}\, B_0}{J} = \omega^2$

Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\,\theta = 0$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) = \theta_m \sin\left(\frac{\mathcal{M}\, B_0}{J}t + \varphi\right)$$

θ_m étant l'élongation maximale. Ainsi, les oscillations de faible amplitude de l'aiguille aimantée sont pratiquement sinusoïdales.

La pulsation de l'aiguille aimantée est :

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{M}\, B_0}{J}}$$

5. On déduit de l'expression de la pulsation, la période T de l'aiguille aimantée :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\ ;$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}\, B_0}}$$

La mesure de la période fournit une méthode de détermination du moment magnétique $\mathcal{M}$.

Exercice III.3*** — Moment magnétique d'une sphère chargée en rotation

- **Première méthode :**

On décompose, comme dans l'exercice précédent, la sphère en couronnes élémentaires, comme illustré dans la Fig. EIII.3.

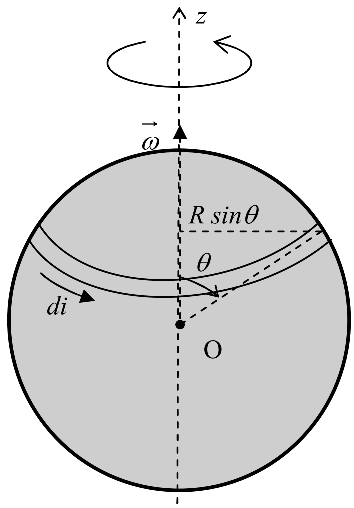

Fig. EIII.2

Le volume élémentaire de cette couronne est :

$$d\tau = r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\varphi$$

Exprimons le moment magnétique d'un élément de courant *dI* dû à un anneau de rayon *r* et d'épaisseur *dr* avec une charge *dq* :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{M}} = di \cdot \pi \left(r \sin\theta\right)^2 \overrightarrow{u_z}$$

Soit une couronne élémentaire de volume $d\tau$; elle porte la charge élémentaire :

$$dq = \rho \cdot r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\varphi$$

Dans son mouvement de rotation, cette couronne est équivalente à une spire de rayon $r\sin\theta$. La charge élémentaire *dq* qui se déplace à la vitesse $\vec{v}$ et traverse la couronne en rotation au cours d'une période *T*, donne naissance à une intensité de courant élémentaire *di*, telle que :

$$di = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi}\omega$$

$$\Rightarrow \qquad di = \frac{\rho \cdot r^2 \sin\theta \cdot dr\, d\theta\, d\varphi}{2\pi}\omega = \frac{1}{2\pi}\rho\, \omega r^2 \sin\theta\ dr\, d\theta\, d\varphi$$

En substituant l'expression de *di* dans celle du moment magnétique élémentaire $\overrightarrow{d\mathcal{M}}$ de la couronne, on obtient :

$$\overrightarrow{d\mathcal{M}} = \frac{1}{2\pi}\rho\, \omega r^2 \sin\theta\ dr\, d\theta \cdot \pi \left(r\sin\theta\right)^2 \overrightarrow{u_z} = \frac{1}{2\pi}\rho\, \omega\, \pi r^4 \sin^3\theta\ dr\, d\theta \overrightarrow{u_z}$$

En intégrant de $r = 0$ à $r = R$, on obtient le moment magnétique total:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \int \overrightarrow{d\mathcal{M}} = \frac{1}{2\pi}\rho\,\omega\,\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \overrightarrow{u_z}$$

Soit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{2\pi}\rho\,\omega\,\pi\frac{R^5}{5}\int_0^\pi \sin^2\theta \cdot \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \overrightarrow{u_z}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\rho\,\omega\,\pi\frac{R^5}{5}\cdot 2\pi \int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)\cdot \sin\theta\, d\theta\, \overrightarrow{u_z}$$

c.-à-d. :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{1}{5}\rho\,\omega\,\pi\, R^5\left\{\left[-\cos\theta\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos^2\theta \cdot \sin\theta\, d\theta\right\}\overrightarrow{u_z}$$

$$= \frac{1}{5}\rho\,\omega\,\pi\, R^5\left\{\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi\right\}\overrightarrow{u_z}$$

D'où : $$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{4}{15}\rho\,\pi\,\omega\, R^5\, \overrightarrow{u_z}}$$

- **Deuxième méthode :**

Exprimons le moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de la sphère en fonction de sa masse m, de sa charge Q et de son moment cinétique $\vec{L}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{Q}{2m}\vec{L}$$

La sphère de rayon R porte une charge Q, répartie uniformément avec la densité volumique ρ ; elle est donnée par :

$$Q = \rho\,\tau = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$$

Exprimons le moment cinétique $\vec{L}$ de la sphère en fonction de son moment d'inertie J et de la vitesse angulaire ω :

$$\vec{L} = J\,\vec{\omega} = J\,\omega\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L} = \frac{2}{5}m\,R^2\omega\,\overrightarrow{u_z}$$

En substituant l'expression du moment cinétique $\vec{L}$ dans celle du moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$, on obtient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{Q}{2m}\cdot\vec{L} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}\rho}{2m}\cdot\frac{2}{5}m\,R^2\omega\,\overrightarrow{u_z}$$

D'où : $$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{4}{15}\rho\,\pi\,\omega\, R^5\, \overrightarrow{u_z}}$$

On vérifie que les deux méthodes donnent bien le même résultat.

Exercice III.4** — Action d'une boucle de courant circulaire sur un dipôle magnétique

Dans cet exercice, le dipôle est considéré comme **passif**. Il subit l'action du champ magnétique créé par la boucle circulaire parcourue par le courant I. Ainsi, la force agissant sur le dipôle magnétique est donnée par :

$$\left\|\vec{F}\right\| = \mathcal{M}\frac{\partial B}{\partial n}$$

où $\vec{\mathcal{M}}$ est le moment magnétique du dipôle, $\vec{B}$ est le champ magnétique non uniforme créé par la boucle circulaire au point A et $\frac{\partial B}{\partial n}$ est la dérivée du vecteur $\vec{B}$ le long de la direction du vecteur unitaire normal $\vec{n}$. Il est judicieux de choisir l'axe Oz dans la direction du vecteur $\vec{\mathcal{M}}$. Par projection le long de l'axe Oz, on obtient :

$$F_z = \mathcal{M}\frac{\partial B_z}{\partial z} = \mathcal{M}\frac{\partial B}{\partial z}$$

puisque :

$B = B_z = \dfrac{\mu_o I}{2}\cdot\dfrac{R^2}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ est le champ magnétique créé par la boucle circulaire au point A, tel que $OA = z = l$.

Alors :

$$\left.\frac{\partial B}{\partial z}\right|_{z=l} = -\frac{3}{2}\cdot\left.\frac{\mu_o I\, R^2 z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right|_{z=l}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu_o I\, R^2 l}{\left(l^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

Etant donné que $\frac{\partial B}{\partial z} < 0$, alors la composante de la force $F_z < 0$ et le vecteur $\vec{F}$ est donc dirigé vers le centre O de la boucle de courant. Par conséquent,

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu_o I\, R^2 l}{\left(l^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\vec{\mathcal{M}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\mu_o I\, R^2 l}{\left(l^2+R^2\right)^{\frac{5}{2}}}\mathcal{M}\,\vec{u_z}}$$

Le dipôle magnétique est ainsi attiré par la boucle de courant.

- Dans le cas où le dipôle magnétique est de sens contraire, c.à.d. $\vec{\mathcal{M}} = -\mathcal{M}u_z$, alors la force d'interaction magnétique est répulsive et le dipôle est repoussée par la boucle de courant.

Exercice III.5*** — Oscillations d'une spire dans le champ magnétique terrestre

1. Par définition, le moment magnétique de la spire de surface S, parcourue par le courant I, est :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\iint_S \overrightarrow{dS} = I\,\vec{S} = I\,S\,\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = I\,\pi R^2\,\vec{n}}$$

où $\vec{n}$ est la normale de la spire et $S = \pi R^2$ est la surface de la boucle.

Il convient de noter que le sens du vecteur moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est lié au sens du courant conventionnel I dans la boucle de courant. Il est donné par la règle de la main droite (ou la règle du tire-bouchon) : les doigts de la main droite sont enroulés autour de la boucle de courant dans la direction du courant I, et la direction du moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est celle du pouce droit. En d'autres termes, le vecteur normal $\vec{n}$ est orienté par le courant dans le sens Sud-Nord.

2. Le moment du couple agissant sur la spire tend à orienter son moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ dans la direction et le sens de $\vec{B} = B_h\vec{u}$ de façon à minimiser son énergie potentielle; il est donné par :

$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\Gamma} = \mathcal{M}\,\vec{n} \wedge B_h\vec{u} = -\mathcal{M}\,B_h \sin\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$

3. On se propose de déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement de la spire circulaire.

- **Utilisation de la RFD d'un solide en rotation** :

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique du solide en rotation. Si J désigne le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe de rotation, la RFD du solide en rotation peut s'exprimer, dans un référentiel galiléen, sous la forme suivante :

$$\vec{\Gamma} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$

En projetant cette relation sur l'axe z, on obtient :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathcal{M}\,B_h \sin\theta$$

Bien que cette équation différentielle ne soit pas, en général, linéaire, nous pouvons utiliser une approximation pour montrer que, pour des élongations angulaires petites θ << 1, l'équation différentielle est linéaire et que, par conséquent, le mouvement de la spire est un mouvement harmonique simple. Ainsi dans le cas d'oscillations de faible amplitude θ_m, on peut écrire :

$$\sin\theta \approx \theta\left(radian\right) \quad \text{avec} \quad \theta \ll 1$$

Par suite :

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathcal{M}\,B_h\,\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}\,B_h}{J}\theta = 0$$

En posant :

$$\frac{\mathcal{M}\, B_h}{J} = \omega^2$$

Cette équation différentielle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\,\theta = 0$$

On reconnait l'équation d'un oscillateur harmonique simple dont la solution générale est de la forme :

$$\theta = \theta_m \sin(\omega t + \varphi) = \theta_m \sin\left(\frac{\mathcal{M}\, B_h}{J} t + \varphi\right)$$

Les constantes θ_m et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

- **Utilisation de l'énergie potentielle :**

L'énergie potentielle de la spire placée dans le champ magnétique terrestre est :

$$E_P = -\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{B_h} = -\mathcal{M} B_h \cos\theta$$

Le système étant isolé, l'énergie mécanique totale se conserve.

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} J \frac{d^2\theta}{dt^2} - \mathcal{M} B_h \cos\theta$$

Pour obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement de la spire, il suffit de dériver l'expression de l'énergie mécanique par rapport à θ. On alors,

$$\frac{dE_M}{d\theta} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} - \mathcal{M} B_h\, \dot{\theta} \sin\theta = 0$$

En simplifiant par $\dot{\theta}$, on retrouve bien l'équation différentielle précédente :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}\, B_h}{J}\theta = 0$$

4. Les oscillations de faible amplitude de la spire sont pratiquement sinusoïdales, de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathcal{M}\, B_h}{J}}$$

Le moment d'inertie de la spire circulaire par rapport à un axe passant par son centre est :

$$J = m\,R^2$$

En substituant l'expression de J dans celle de la pulsation ω, on obtient :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{M}\, B_h}{m\,R^2}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,R^2}{\mathcal{M}\, B_h}}$$

La mesure de la période T permet de calculer la composante horizontale du champ magnétique terrestre :

$$B_h = \frac{4\pi^2 m\,R^2}{\mathcal{M}\, T^2}$$