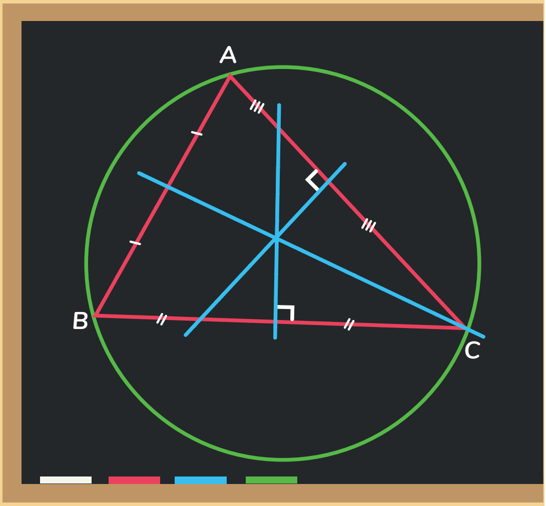
THÈME 3

GÉOMÉTRIE



SOMMAIRE

Calcul vectoriel et produit scalaire

Remarque

Dans tout le présent chapitre, on considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

I Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

Définition **Produit scalaire**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et A, B, C trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

– On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

– Si l'un, au moins, des deux vecteurs est nul, alors, **par convention**, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

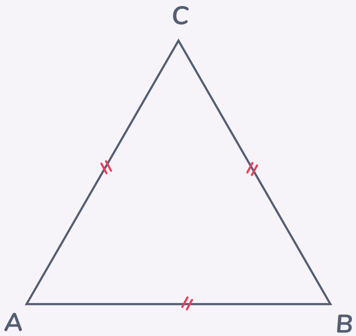
■ **Exemple**

Le triangle ABC ci-dessous est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times5\times\cos\left(60^\circ\right)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\times5\times\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12{,}5$



Propriété Soient A, B, C et D quatre points du plan (avec $A\neq B$ et $C\neq D$), et A', B' les **projetés orthogonaux** des points A et B sur la droite (CD).

Alors : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\begin{cases}A'B'\times CD \text{ si } \overrightarrow{A'B'} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont de même sens}\\ -A'B'\times CD \text{ si } \overrightarrow{A'B'} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont de sens contraires}\end{cases}$

Remarque

Le projeté orthogonal d'un point sur une droite est vu en classe de seconde. On se reportera au chapitre correspondant.

■ **Exemple**

Sur la figure ci-dessous, l'unité du quadrillage est l'unité graphique du repère.

On y trouve quatre points A, B, C et D.

Les points A' et B' sont les projetés orthogonaux des points A et B sur la droite (CD).

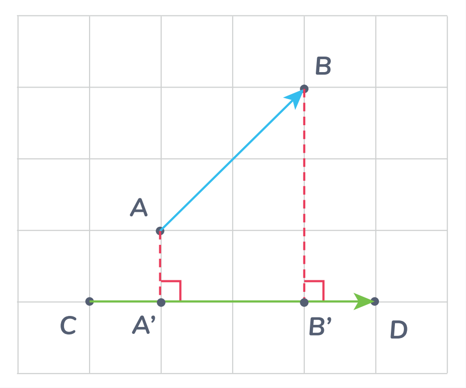
Alors :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = A'B' \times CD$, car $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens.

On obtient donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 4$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 8$



II Quelques propriétés du produit scalaire

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

■ **Exemple**

Sur la figure ci-dessus, l'unité du quadrillage est l'unité graphique du repère. On y trouve quatre points A, B, C et D tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux.

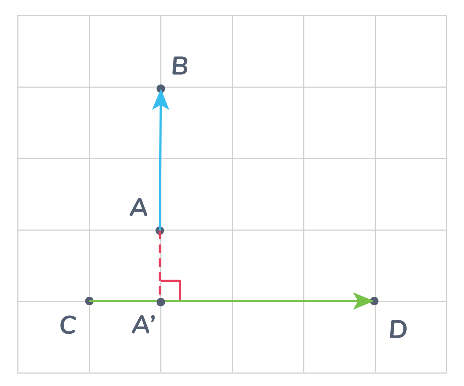
Le point A' est à la fois le projeté orthogonal du point A et celui du point B sur la droite (CD).

Alors, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = A'A' \times CD$.

On obtient donc :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \times 4$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$



Propriété Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|u\|^2$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

– $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

– $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

– $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Remarque

On en déduit par exemple que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$, ce qui rappelle évidemment le théorème de Pythagore.

Astuce

En écrivant la deuxième identité sous la forme $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\times\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, on obtient une identité très proche de l'identité remarquable de seconde. Cela peut servir de moyen mnémotechnique.

Propriété Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Corollaire Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx' + yy' = 0$.

Exemple

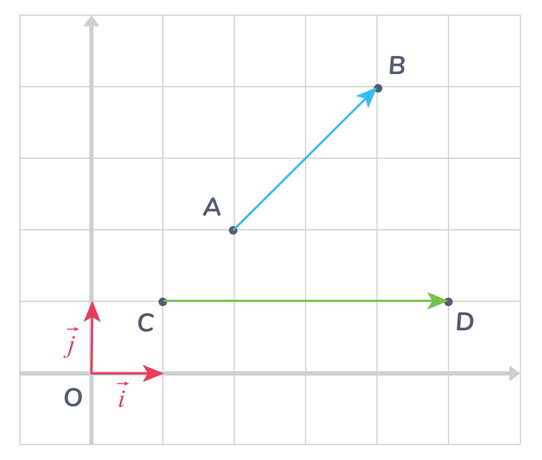
Sur la figure ci-contre, on trouve quatre points A, B, C et D dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

On obtient donc :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 2\times4+2\times0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 8$



On retrouve bien le résultat de l'exemple lié à la deuxième formule.

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

Remarque

On dit que le produit scalaire est **symétrique** ou **commutatif**.

Propriété Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et soit λ un nombre réel quelconque. Alors :

- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (**distributivité à gauche**)
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (**distributivité à droite**)
- $\left(\lambda\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$
- $\vec{u}\cdot\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

III Quelques applications du produit scalaire

Propriété Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors, $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+\left\|\vec{v}\right\|^2$.

Démonstration

Les propriétés précédentes donnent :

- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)+\left\|\vec{v}\right\|^2$

Propriété Soit ABC un triangle quelconque. Avec les notations de la figure, on a :

$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$