Partie II

IL ETAIT UNE FOIS LA PREMIERE : DECOUVERTE

Ouf ! Les révisions sont faites, on suppose que vous avez hâte de rentrer dans le vif du sujet, c'est-à-dire dans le programme de Première (ou dans la piscine, cela dépend de votre état).

Nous avons choisi pour vous six chapitres faciles, pas prise de tête afin de vous initier en douceur aux joies des maths de Première.

Un peu d'analyse, un peu de probas, un peu de géométrie, histoire d'arriver en première sans stress et sans peur irrationnelle de l'inconnue, et puis avec un peu d'avance (donc d'aisance) dans ces chapitres clefs car vraiment représentatifs de la première !

A chaque instant, n'hésitez pas à souffler un peu (les vacances, ça ne doit pas être le bagne !), faites une petite partie sur la console si vous ne pigez plus rien, ou allez prendre l'air, le but n'est pas de vous gaver jusqu'à l'écœurement (comme si vous aviez mangé une demi-douzaine de kouign-amann à la suite), mais d'apprendre en souplesse dans une atmosphère détendue. Cela dit, si l'envie vous tenaille d'en savoir vraiment plus, avant tout le monde, rien ne vous empêche de vous procurer *Method' Première* qui vous permettra d'approfondir ce que l'on voit là.

Voici maintenant le programme des réjouissances :

On a choisi de vous présenter :

- Les suites, outil complètement nouveau mais pas si difficile que cela à manipuler si l'on maîtrise les méthodes classiques les concernant (et qu'on va vous exposer pour votre plus grand plaisir !).
- Les équations du second degré, chapitre vraiment facile, calculatoire, et qui rapporte pas mal de points en début d'année.
- La dérivation, chapitre calculatoire également, méthodique, et diaboliquement efficace lorsqu'on le réinvestit pour les études de fonctions.
- Des rappels de probas puis une expérience concrète : un jeu d'argent qui vous familiarisera avec les variables aléatoires et vous permettra de réfléchir à deux fois avant de rentrer (à votre majorité) dans un casino.
- Les fonctions trigonométriques, chapitre clef du programme de Première où mémorisation, logique et dessins se côtoient (plus marrant qu'un Sudoku, plus captivant encore qu'un Kakuro, la trigo c'est vraiment le top…).
- Le produit scalaire, outil vectoriel révolutionnaire, véritable "tueur" des problèmes d'orthogonalité.

A travers ces six nouveaux chapitres, vraiment typiques de la première, vous allez avoir l'occasion de vous donner à fond, et d'arriver en septembre avec au moins autant d'assurance que le bellâtre actuellement en train de se pavaner en haut du grand plongeoir de la piscine municipale où vous avez décidé de passer l'après-midi en bonne compagnie, c'est-à-dire avec ce cahier de vacances Method'.

Bon courage et bon plongeon !

3 INTRODUCTION AUX SUITES

Hier soir, à la spéciale disco-eighties du dance floor du camping, vous étiez le roi : vous avez envoûté tout le monde sur le tube « Just an illusion » (ouh, ouh, ouh, ouh, aha…), cassé la baraque sur « La chenille » (avec les deux pieds en canard) et puis dans un élan de folie vous avez voulu tenter le grand écart sur « Saturday Night Fever » comme le grand John T… Hélas pour vous, vous avez déchiré votre pantalon et avez lamentablement fini la tête dans le bocal à punch… bref vous vous êtes grillé pour au moins une semaine et n'osez plus sortir de votre tente. Mais que faire, en attendant… Tout d'abord dédramatiser, et le meilleur moyen d'y parvenir est encore d'utiliser votre précieux livre « Les vacances de Method' » qui est là pour vous remonter le moral. Vous ne serez peut être pas le killer du disco, mais à défaut vous pourrez devenir le killer de l'analyse mathématique en maîtrisant « à mort » ce fabuleux outil mathématique que sont les suites. Prêt (then i get night fever… we know how to get it…) ? C'est parti !

1. NOTION DE SUITE

Une suite c'est intuitivement, comme son nom l'indique, une suite de nombres. Par exemple 1, 2, 3, 4,… est une suite (c'est la suite des nombres entiers), 2, 4, 6,… aussi est une suite (la suite des nombres pairs), 1, 3, 5, 7, aussi (la suite des nombres impairs), 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 est la suite des puissances (positives) de deux, etc. Il y a en fait de multiples moyens d'en créer bien d'autres : par une phrase, par une formule (ce qui les rapproche des fonctions), par une relation de récurrence, par une fonction, par un graphique… voyons cela !

DEFINITIONS :

a) (U_n) (avec des parenthèses) désigne **la suite** de terme général U_n (sans parenthèses).

b) U_n lui, désigne **le terme général** de rang n (ou d'indice n). Par exemple, U_0 est le terme de rang 0, U_1 celui de rang 1, etc.

c) n est l'**indice**, n est entier et toujours positif.

REMARQUE : Vous n'avez rien compris ? C'est normal, attendez qu'on ait vu les exemples qui suivent, ça va devenir d'un coup tout de suite plus clair ! (ça me fait un peu penser à mon moniteur de planche à voile qui m'explique tous les termes techniques de la planche [de A à Z] avant même que j'ai déjà vu quelqu'un en faire…)

METHODE 1 : Comment calculer des premiers termes de (U_n) où U_n est définie par une formule ?

Remplacer n par le rang que vous cherchez (tout simplement), comme avec une fonction où on remplace x par une valeur !

EXEMPLE : *Soit* (A_n) *la suite définie par : pour tout entier* $n \geq 0$, $A_n = 2n+7$. *Déterminer les six premiers termes.*

On peut commencer à $n = 0$, ce qui donne : $A_0 = 2 \cdot 0 + 7 = 7$, puis $A_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 9$, $A_2 = 2 \cdot 2 + 7 = 11$, $A_3 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$, $A_4 = 2 \cdot 4 + 7 = 15$, $A_5 = 2 \cdot 5 + 7 = 17$ (Stop ! On a les six premiers termes !)

METHODE 2 : Comment calculer des premiers termes de (U_n) où U_n est définie par une relation de récurrence ?

On calcule de proche en proche, tout simplement !

EXEMPLE : *Soit* (U_n) *la suite définie par la relation de récurrence :*

$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 3 \\ U_0 = -6 \end{cases}$. *Déterminer les six premiers termes.*

On a $U_0 = -6$, puis de proche en proche :

$U_1 = 2U_0 + 3 = 2 \cdot (-6) + 3 = -12 + 3 = -9$,
$U_2 = 2U_1 + 3 = 2 \cdot (-9) + 3 = -18 + 3 = -15$, $U_3 = 2U_2 + 3 = 2 \cdot (-15) + 3 = -27$,

$U_4 = 2U_3 + 3 = 2 \cdot (-27) + 3 = -51$ et $U_5 = 2U_4 + 3 = 2 \cdot (-51) + 3 = -99$, tout simplement.

METHODE 3 : Comment représenter graphiquement une suite ?

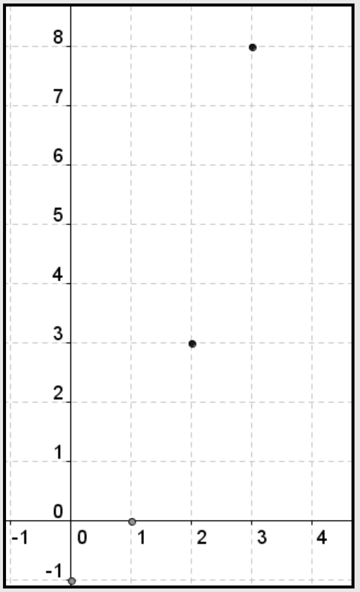
n est en abscisses, U_n en ordonnées. C'est donc juste une lecture graphique !

EXEMPLE : Soit (U_n) *la suite définie par :* $U_n = n^2 - 1$. *Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.*

On calcule d'abord les quatre premiers termes : U_0, U_1, U_2, et U_3.

On a : $U_0 = 0^2 - 1 = -1$, $U_1 = 1^2 - 1 = 0$, $U_2 = 2^2 - 1 = 3$, $U_3 = 3^2 - 1 = 8$.

Ensuite on reporte dans un repère les points de coordonnées $(0,U_0)$, $(1,U_1)$, $(2,U_2)$, et $(3,U_3)$, ce qui donne le nuage de points suivant :



C'est beau n'est-ce pas (sachez que pour un prof de maths, c'est aussi sublime qu'un coucher de soleil sur la corniche basque [Pyrénées atlantiques] ou sur la pointe du Raz [Finistère sud]).

REMARQUE : La représentation graphique d'une suite n'est absolument pas une courbe mais juste une succession de points. C'est la différence entre le "discret" (point, suite) et le "continu" (fonction réelle, courbe), phrase d'une profondeur philosophique abyssale, à ressortir au speed-dating du bar de la plage ce soir…

2. SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Dans le monde passionnant des suites (si, si !), il existe, comme pour les fonctions, des suites croissantes et des suites décroissantes. Pour savoir si une suite est croissante (ou décroissante) vous pouvez quand même appliquer la méthode suivante (appelée méthode de la différence), sans aucun problème !

METHODE 4 : Comment montrer qu'une suite est croissante ?

Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n > 0$ alors (U_n) est strictement croissante.

Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n < 0$ alors (U_n) est strictement décroissante.

EXEMPLE : Soit (U_n) *la suite définie par : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2n - 5$. *Etudier les variations de* (U_n).

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = (2(n+1) - 5) - (2n - 5) = (2n + 2 - 5) - 2n + 5$ soit $U_{n+1} - U_n = 2n - 3 - 2n + 5 = 2$. Ainsi, pour tout n, $U_{n+1} - U_n > 0$ donc (U_n) est strictement croissante.

EXEMPLE : Soit (U_n) *la suite définie par : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_{n+1} = U_n - 3 \\ U_0 = 2 \end{cases}$.
Etudier les variations de (U_n).

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3$, soit $U_{n+1} - U_n < 0$. Donc (U_n) est strictement décroissante.

EXEMPLE : Soit (V_n) *la suite définie par : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2^n$. *Etudier les variations de la suite* (V_n).

Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \cdot 2 - 2^n = 2^n \cdot (2 - 1) = 2^n$. Donc pour tout n, $V_{n+1} - V_n > 0$, ce qui montre que (V_n) est strictement croissante.

EXEMPLE : Soit (W_n) *la suite définie par : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = 1 - \frac{1}{n}$. *Etudier les variations de la suite* (W_n).

Pour tout n $n \neq 0$, $W_{n+1} - W_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} - 1 + \frac{1}{n}$ soit $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ donc pour tout n, $W_{n+1} - W_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$, $W_{n+1} - W_n > 0$ et (W_n) est strictement croissante.

Remarque : il existe deux autres méthodes pour montrer qu'une suite est croissante (ou décroissante) : ces deux méthodes (à savoir la méthode du quotient et la méthode fonctionnelle) que vous verrez en première (donc dans Method' Première) sont parfois plus rapides mais on ne peut pas toujours les utiliser (car elles ne marchent pas pour toutes les suites). En revanche, la méthode de la différence que nous vous avons présentée ici marche 99,99 % du temps et c'est déjà bien de la voir en preview comme cela pendant les vacances. Néanmoins, si vous voulez découvrir les autres méthodes alors procurez-vous au plus vite Method' Première (c'est un magnifique livre bleu).

Poursuivons maintenant avec deux types de suites bien particulières, absolument magnifiques (je dirais même « Le comble du chic du magnifique, MA CHERIE ! »), c'est parti !

3. LES SUITES ARITHMETIQUES ET GEOMETRIQUES

Une suite arithmétique est une suite où on ajoute (ou retranche) toujours la même chose. Une suite géométrique est une suite où on multiplie (ou divise) toujours par la même chose.

Les suites arithmétiques et géométriques sont donc des suites très particulières : elles fascinaient déjà les savants de l'Antiquité par leur régularité magnifique, quasi divine. Voyons cela !

DEFINITION : La suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 \\ U_{n+1} = U_n + r \end{cases}$ est appelée **suite arithmétique** de premier terme U_0 et de **raison** r.