Chapitre 6

PRODUIT SCALAIRE

Ce chapitre poursuit le travail effectué en Seconde sur le calcul vectoriel. La trigonométrie est « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît », comme le définit D'Alembert, mathématicien français. Le produit scalaire va nous y aider mais il ne se limite pas qu'à cela. Il a un sens concret en physique ce qui permet d'avoir une interprétation, assez visuelle. C'est un travail qui se poursuivra dans la géométrie dans l'espace en Terminale mais les fondements sont vus cette année.

À ce stade, on commence à cumuler un certain nombre de connaissances, ce qui va permettre de visualiser le produit scalaire sous plusieurs formes et on constatera la puissance de cet outil : dans les calculs d'angles, de distances et sur des questions d'orthogonalité.

Ce chapitre est très dense et malheureusement, pour l'épreuve du baccalauréat, on l'utilisera très peu (ce que l'on peut constater sur plusieurs sujets). Néanmoins, pour des études scientifiques, on ne peut pas se permettre d'éviter cette notion. Le fait de la maîtriser est important, s'en accaparer se révélera indispensable tant son utilisation est vaste. À l'issue, les triangles n'auront plus aucun secret pour vous et le fameux théorème de Pythagore pourra être jeté aux oubliettes car vous l'aurez généralisé.

1 RAPPELS ET PRÉREQUIS

1.1 VECTEURS ET NORME

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel.

- Rappeler l'expression en fonction de x et y, de la norme $\left\|\vec{u}\right\|$ de $\vec{u}$.

....

- Donner les coordonnées de $k\vec{u}$ et montrer que sa norme $\left\|k\vec{u}\right\|$ vaut $|k| \times \left\|\vec{u}\right\|$.

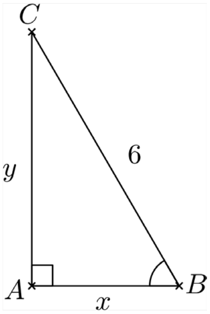
....

Exercice 2

Soit un triangle ABC rectangle en A avec $AB = x$, $AC = y$ et $BC = 6$.

On donne $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$.

Déterminer x et y.



....

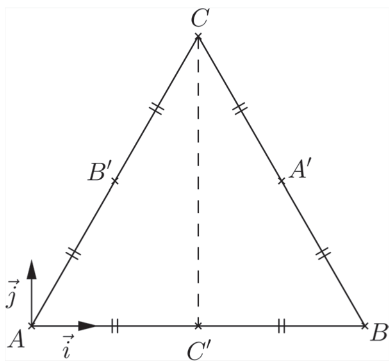
....

....

1.2 PRÉREQUIS

Exercice 3

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 5. On note A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$. On considère $(A;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé.



1. Donner les coordonnées des points A, B, C, A', B' et C'.

....

....

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

....

....

3. Calculer le nombre : $\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-BC^2\right]$.

....

....

4. Calculer le nombre : $AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

....

....

5. Calculer le nombre : $AB \times AC'$.

6. Calculer le nombre : $x_{\overrightarrow{AB}} x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} y_{\overrightarrow{AC}}$.

2 DÉFINITION DU PRODUIT SCALAIRE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

2.1 DÉFINITION

Définition 2.1

Le **produit scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ par un vecteur $\vec{v}$** est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{v}-\vec{u}\right\|^2\right]$.

REMARQUES

- Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur. C'est la première opération que vous voyez qui transforme la nature des objets que l'on a en entrée.
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A un point.

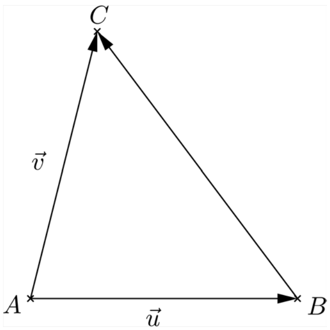
On construit deux points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On constate que :

$\vec{v} - \vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

Ainsi la formule du produit scalaire devient :

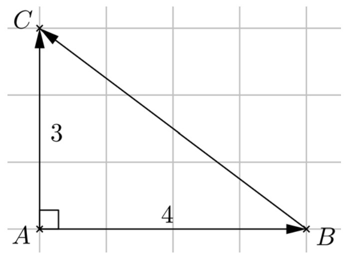
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right]$.



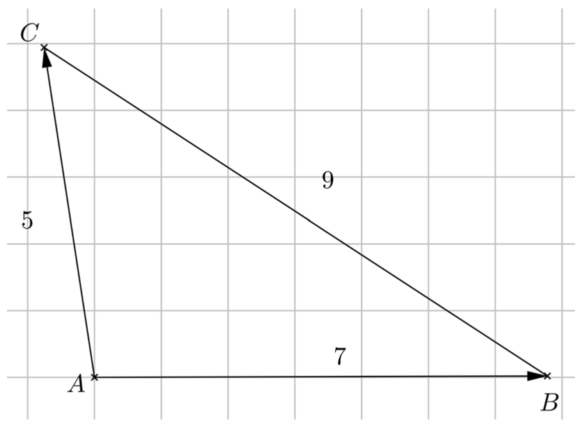
Exercice 4

- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.

  Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.



- Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 5$ et $BC = 9$.
  Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.



Propriété 2.1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$,
- $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$,
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

DÉMONSTRATION

- On a : $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \left\|-\left(\vec{v} - \vec{u}\right)\right\| = \left\|\vec{v} - \vec{u}\right\|$.
  Donc :
  $\vec{v}.\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{v} - \vec{u}\right\|^2\right] = \vec{u}.\vec{v}$

- $\vec{u}^2$ est une notation pour signifier $\vec{u}.\vec{u}$, le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$.

  On a : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2\right] = \|\vec{u}\|^2$.

- Supposons que $\vec{u} = \vec{0}$. ($\vec{v} = \vec{0}$ est un cas similaire.)

  $\vec{0}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{0}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{0}\|^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = 0.$ ■

REMARQUE

Avec le premier point de cette propriété, on dit que le produit scalaire est **symétrique**.

2.2 ORTHOGONALITÉ

Définition 2.2

Deux vecteurs non nuls sont dits **orthogonaux** lorsque les droites portées par ces vecteurs sont perpendiculaires. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.

Propriété 2.2

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

■ DÉMONSTRATION

- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

  Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors on sait que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

  Si les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

  Soit trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Comme les vecteurs sont orthogonaux, alors (AB) et (AC) sont perpendiculaires et donc le triangle ABC est rectangle en A.

On a donc, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$,

donc $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right] = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$.

- Supposons que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

  Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors avec les notations précédentes (AB) et (AC) sont sécantes en un seul point, A.

  On a : $\dfrac{1}{2}\left[AB^2 + AC^2 - BC^2\right] = 0$, d'où : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. La réciproque du théorème de Pythagore nous dit que le triangle ABC est rectangle en A donc (AB) et (AC) sont perpendiculaires et ainsi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

  Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

  $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|k\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{v} - k\vec{v}\right\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[k^2\left\|\vec{v}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - (1-k)^2\left\|\vec{v}\right\|^2\right]$$

  $$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[k^2 + 1 - (1-k)^2\right]\left\|\vec{v}\right\|^2 = k\left\|\vec{v}\right\|^2.$$

  Donc soit $k = 0$ et donc $\vec{u} = \vec{0}$, soit $\left\|\vec{v}\right\|^2 = 0$ et donc $\vec{v} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

Exercice 5

Dans un repère orthonormal, on donne trois points $A(-1;0)$, $B(3\,;-2)$ et $C(5\,;7)$.

- Déterminer les coordonnées de I milieu de $[AB]$.
- Déterminer $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{CI}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{AB}\right\|$.
- Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{CI}$. En déduire que C appartient à la médiatrice de $[AB]$.
- Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.