Chapitre 23

Géométrie vectorielle euclidienne

Ce qui suit est une généralisation de ce qui est vu dans le secondaire : $\vec{u}(x,y) \perp \vec{v}(x',y') \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0$ dans toute base orthonormée. On peut alors définir le « produit scalaire » de deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ dans une base orthonormée par $\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y'$ ou une autre formulation équivalente :
$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$ ou bien encore :
$\vec{u}.\vec{v} = \overline{OH}.\overline{OA}$ où (O,A) est un représentant de $\vec{u}$ et (O,H) un représentant du projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.
On procède dans cette section à l'inverse en définissant d'abord un produit scalaire puis l'orthogonalité. On se place le plus souvent dans le plan ou l'espace usuels, bien que tout ce qui suit a naturellement sa place dans n'importe quel espace vectoriel de dimension finie (cf. [6] et [7]).

23.1 Produit scalaire

Définition 64. *Un produit scalaire sur E est une application*
$<,>: E \times E \to \mathbb{R}$ *bilinéaire, symétrique, définie, positive, c'est-à-dire*
* $\forall(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \in E^3, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:

$< \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v}, \vec{w} >= \lambda. < \vec{u},\vec{w} > +\mu. < \vec{v},\vec{w} >$

$< \vec{w}, \lambda.\vec{u} + \mu.\vec{v} >= \lambda. < \vec{w},\vec{u} > +\mu. < \vec{w},\vec{v} >$.

* $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, < \vec{u},\vec{v} >=< \vec{v},\vec{u} >$.
* $\forall\vec{u} \in E, < \vec{u},\vec{u} >\geq 0$ *et* $(< \vec{u},\vec{u} >= 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0})$.

Exemples :

(i) Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n et $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ une base de E. Pour tous $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, on pose : $< \vec{u}, \vec{v} >= x_1.x'_1 + ... + x_n.x'_n$. C'est le produit scalaire canonique associé à la base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$. On notera aussi dans ce cas $< \vec{u}, \vec{v} >= \vec{u}.\vec{v}$.

(ii) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré au plus n. On pose $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Définition 65. *Un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel E de dimension finie muni d'un produit scalaire $<, >$.*

23.2 Norme euclidienne

Proposition 55. *Soit $(E, <, >)$ un espace vectoriel euclidien. Alors l'application $||.|| : \vec{u} \in E \to \sqrt{< \vec{u}, \vec{u} >} \in \mathbb{R}$ est une norme, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $<, >$ (on note aussi $\vec{u}^2$ au lieu de $< \vec{u}, \vec{u} >$).*

Théorème 77. *(**Inégalité de Schwarz**) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $| < \vec{u}.\vec{v} > | \leq ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ avec égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés.*

Cela permet en outre de démontrer l'inégalité triangulaire.
En revenant sur les exemples du début, on a donc :

(i) $\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall (x'_1, ..., x'_n) \in \mathbb{R}^n, |\Sigma x_i.x'_i| \leq \sqrt{\Sigma {x_i}^2}.\sqrt{\Sigma {x'_i}^2}$.

(ii) $\forall (f, g) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, |\int_0^1 f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}.\sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt}$.

On peut aussi, à partir de la norme $||.||$, retrouver le produit scalaire $<, >$ par l'intermédiaire de la forme quadratique :

Définition 66. *La forme quadratique associée à un produit scalaire $<, >$ est l'application $q : \vec{u} \in E \to ||\vec{u}||^2 \in \mathbb{R}$.*

Proposition 56.

(i) $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, q(\vec{u} + \vec{v}) = q(\vec{u}) + q(\vec{v}) + 2. < \vec{u}, \vec{v} >$.

(ii) $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, q(\vec{u}-\vec{v}) = q(\vec{u}) + q(\vec{v}) - 2. < \vec{u},\vec{v} >$.
(iii) $\forall \vec{u} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q(\lambda.\vec{u}) = \lambda^2.q(\vec{u})$.
(iv) $\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, < \vec{u},\vec{v} >= \frac{1}{4}.(q(\vec{u}+\vec{v}) - q(\vec{u}-\vec{v}))$.

23.3 Ecriture matricielle

Soit $(\vec{e_1},...,\vec{e_n})$ une base de $(E,<,>)$ euclidien.

Théorème 78. *En notant* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *le vecteur colonne des coordonnées de* $\vec{u}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *le vecteur colonne des coordonnées de* $\vec{v}$*, on a :* $< \vec{u},\vec{v} >= X^t.A.Y$ *où* A *est la matrice* $A = (< \vec{e_i},\vec{e_j} >)_{i,j=1}^n$ *et* X^t *est la matrice (ligne) transposée de la matrice (colonne)* X*.*

En effet, $< \vec{u},\vec{v} >= \Sigma_{i,j=1}^n x_i.x_j. < \vec{e_i},\vec{e_j} >$.

Remarques :
* $q(\vec{u}) = X^t.A.X$.
* Dans l'exemple (i), on trouve $< \vec{u},\vec{v} >= X^t.Y$ et $q(\vec{u}) = X^t.X$ puisque $A = I$ pour le produit scalaire canonique.

Théorème 79. *(changement de bases) Dans une autre base* $(\vec{e'_1},...,\vec{e'_n})$ *de* E*, on a :* $< \vec{u},\vec{v} >= X'^t.A'.Y'$ *où* $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ *est le vecteur colonne des coordonnées de* $\vec{u}$*,* $Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ *est le vecteur colonne des coordonnées de* $\vec{v}$ *dans* $(\vec{e'_1},...,\vec{e'_n})$*, et* $A' = (< \vec{e'_i},\vec{e'_j} >)_{i,j=1}^n = P^{-1}.A.P$ *avec* P *matrice de "passage" de* $(\vec{e_1},...,\vec{e_n})$ *à* $(\vec{e'_1},...,\vec{e'_n})$*.*

Théorème 80. *Inversement, soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice carrée* (n,n)*. Alors* A *est la matrice d'un produit scalaire si et seulement si* A *est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.*

On peut aussi utiliser la méthode de Newton pour réduire une forme quadratique ([6]) en somme de carrés $\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i.{x'_i}^2$ et s'assurer que : $\forall i, \lambda_i > 0$.

23.4 Orthogonalité

On se place dans un espace vectoriel euclidien $(E, <, >)$.

Définition 67. **(i)** *On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$. On écrit alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.*

(ii) *Une famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale lorsque :* $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow < \vec{u}_i, \vec{u}_j >= 0$.

(iii) *Une famille $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale lorsque :* $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow < \vec{u}_i, \vec{u}_j >= 0$ *et* $\forall i \in I, ||\vec{u}_i|| = 1$.

On peut remarquer que toute famille orthogonale est libre.

Théorème 81. ***(Pythagore)*** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Ceci résulte immédiatement de la proposition (56).

Définition 68. ***(s.e.v orthogonaux)*** *Deux s.e.v F_1 et F_2 sont orthogonaux si et seulement si :* $\forall \vec{u}_1 \in F_1, \forall \vec{u}_2 \in F_2, < \vec{u}_1, \vec{u}_2 >= 0$.
On écrit $F_1 \perp F_2$.

Contre-exemple : en dimension 3, deux plans vectoriels ne peuvent pas être orthogonaux (cf. formule de la dimension 66).

Définition 69. *L'orthogonal d'un s.e.v F de E est défini par :*

$$F^{\perp} = \{\vec{u} \in E / \forall \vec{v} \in F, \vec{u} \perp \vec{v}\}.$$

Proposition 57. **(i)** *Pour tout s.e.v F de E, $F^{\perp}$ est un s.e.v de E.*

(ii) $E^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}, \left\{\vec{0}\right\}^{\perp} = E$.

(iii) *Si F_1 et F_2 sont deux s.e.v de E, alors*
$*F_1 \perp F_2 \Leftrightarrow F_1 \subset F_2^{\perp} \Leftrightarrow F_2 \subset F_1^{\perp}$
$*F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow F_2^{\perp} \subset F_1^{\perp}$.

(iv) $F \cap F^{\perp} = \left\{\vec{0}\right\}$.

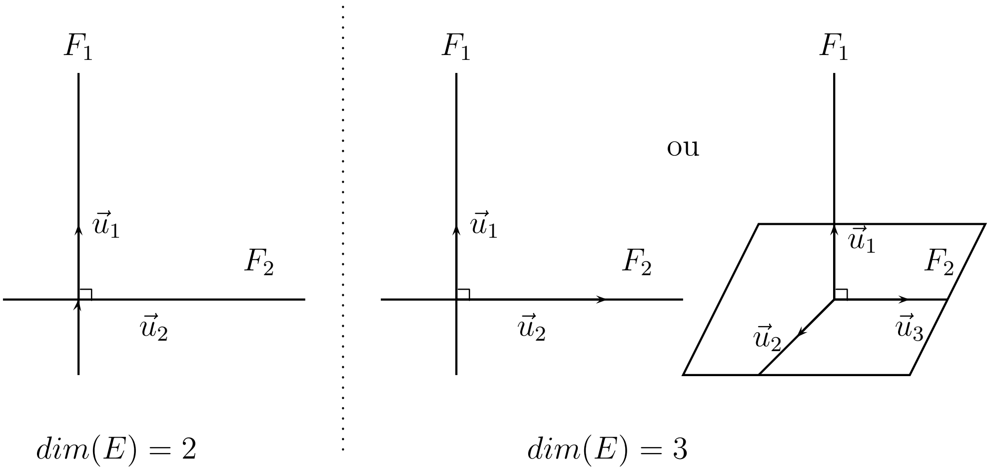

FIGURE 23.1 – s.e.v orthogonaux en dimensions 2 et 3

Un des théorèmes les plus importants sur l'orthogonalité (dont une preuve peut être donnée après l'orthonormalisation de Schmidt ci-après) est la décomposition de l'espace en somme directe d'un s.e.v et de son orthogonal :

Théorème 82. *Pour tout s.e.v F de E, on a :*
$(F^{\perp})^{\perp} = F$ *et* $E = F \oplus F^{\perp}$.

23.4.1 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

L'intérêt d'une base orthonormale est la simplicité du produit scalaire dans une telle base (cf. produit scalaire canonique) ainsi que l'expression de la norme. Or tout espace euclidien admet des bases orthonormales. On peut le démontrer d'une manière constructive en utilisant le théorème :

Théorème 83. *(**Orthonormalisation de Schmidt**) Pour toute base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ de E, il existe une base $(\vec{f_1}, ..., \vec{f_n})$ unique telle que :*

- **(i)** $(\vec{f_1}, ..., \vec{f_n})$ *est orthonormale.*
- **(ii)** $\forall p \in [1, n], \mathbb{R}\vec{e_1} \oplus ... \oplus \mathbb{R}\vec{e_p} = \mathbb{R}\vec{f_1} \oplus ... \oplus \mathbb{R}\vec{f_p}$.
- **(iii)** $\forall p \in [1, n], < \vec{e_p}, \vec{f_p} > > 0$.

On peut vérifier que :

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{e_1}}{||\vec{e_1}||} \text{ et } \overrightarrow{f_{p+1}} = \frac{\overrightarrow{e_{p+1}} - \Sigma_{k=1}^{p} < \overrightarrow{e_{p+1}}, \vec{f_k} > .\vec{f_k}}{||\overrightarrow{e_{p+1}} - \Sigma_{k=1}^{p} < \overrightarrow{e_{p+1}}, \vec{f_k} > .\vec{f_k}||}.$$

En corollaire, on peut facilement démontrer le théorème (82). Prenons pour cela une base $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$ de E telle que $(\vec{e_1}, ..., \vec{e_p})$ soit une base de F. En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on forme une base orthonormale $(\vec{f_1}, ..., \vec{f_n})$ de E telle que $(\vec{f_1}, ..., \vec{f_p})$ soit une base orthonormale de F, d'où le résultat ■

23.4.2 Projection orthogonale

Théorème 84. *Soit F un s.e.v de E euclidien. Alors :*

- **(i)** *Pour tout vecteur $\vec{u} \in E$, il existe un vecteur $p(\vec{u}) \in F$ et un seul tel que $(\vec{u} - p(\vec{u})) \in F^{\perp}$.*
- **(ii)** *De plus $||\vec{u} - p(\vec{u})|| = Inf_{\vec{v} \in F}||\vec{u} - \vec{v}||$ et p est la projection vectorielle orthogonale sur F.*

23.5 Endomorphismes orthogonaux

On se place dans un espace vectoriel euclidien $(E, <, >)$ de dimension n.

Définition 70. *Un endomorphisme $\varphi \in L(E)$ est dit orthogonal s'il conserve le produit scalaire, i.e : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, < \varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v}) >=< \vec{u}, \vec{v} >$.*

On utilise aussi le terme d'isométrie vectorielle. En fait, on peut démontrer qu'une application $\varphi : E \to E$ qui conserve le produit scalaire est nécessairement linéaire.

Exemples : Les symétries orthogonales s_F par rapport à un s.e.v F de E ; en particulier I et $-I$, et surtout les réflexions (=symétries orthogonales par rapport à des hyperplans).

Contre-exemple : Les projections.

Le théorème suivant résulte facilement de la proposition (56).

Théorème 85. *Soit un endomorphisme $\varphi \in L(E)$, alors :*

φ est orthogonal
$\Leftrightarrow \varphi$ conserve la norme
$\Leftrightarrow \varphi$ transforme une base orthonormée en une base orthonormée
$\Leftrightarrow \varphi$ transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

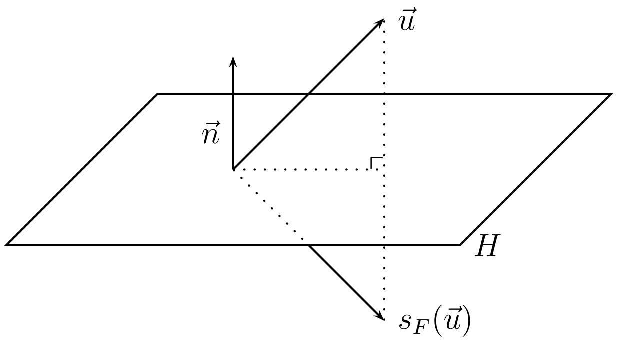

FIGURE 23.2 – réflexion d'hyperplan H avec $\vec{n}$ normal unitaire

Conséquences :

— Si φ est orthogonal, alors $\varphi \in GL(E)$.
— Les seules valeurs propres réelles possibles pour un endomorphisme orthogonal sont -1 et 1.

L'ensemble des endomorphisme orthogonaux de E forme un groupe pour la loi de composition, noté $O(E)$, et appelé *groupe orthogonal de E*.

Matrices orthogonales.

Soit $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ une base orthonormale pour le produit scalaire de E. On notera $\vec{u}.\vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui vaut donc : $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.\vec{v}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Sigma_1^n x_i.y_i$ dans cette base.

Définition 71. ***(Matrice orthogonale)*** *Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si M est la matrice d'un endomorphisme orthogonal φ dans $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. On écrit alors $M \in O(n)$ (sous-groupe de $GL(n)$).*

Par exemple les matrices $M = I$ et $M = -I$ sont orthogonales, et ce sont les seules matrices d'homothéties orthogonales.

Théorème 86. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** *M est orthogonale.*
- **(ii)** *$M^t.M = I$.*
- **(iii)** *M est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.*

En conséquence, si $M \in O(n)$ alors $det(M) = \pm 1$ (réciproque fausse !).

Définition 72. *L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 forme un sous-groupe de $O(n)$ et s'appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n. On le note $SO(n)$.*

$SO(n)$ est donc l'ensemble des matrices des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 : on l'appelle groupe spécial orthogonal de E, et on le note $SO(E)$.

Exercice : si $dim(E) = 1$, alors $O(E) = \{-I, I\}$ et $SO(E) = \{I\}$.

Cas $dim(E) = 2$.

On munit le plan vectoriel E d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ de référence pour orienter E : une autre base orthormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sera dite « directe » (resp. indirecte) si $det_{(\vec{i},\vec{j})}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$ (resp. -1).

Théorème 87. *$\varphi \in O(E)$ si et seulement si φ a une matrice du type $M^+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ ou $M^- = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.*