

# Table des matières

<b>Chapitre 1 : Fonctions eulériennes</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Fonction gamma . . . . .	1
1.1.1 Définition et relation fonctionnelle . . . . .	1
1.1.2 Symbole de Pochhammer . . . . .	2
1.2 Fonction bêta . . . . .	3
1.3 Formule de duplication . . . . .	4
1.4 Formule de Gauss . . . . .	5
1.5 Formule de Weierstrass . . . . .	6
1.6 Formule des compléments . . . . .	8
Exercices du chapitre 1 . . . . .	12
<b>Chapitre 2 : Fonction polygamma</b> . . . . .	<b>15</b>
2.1 Fonction digamma . . . . .	15
2.1.1 Définition et développement en série . . . . .	15
2.1.2 Représentations intégrales . . . . .	17
2.1.3 Formule de Binet . . . . .	18
2.1.4 Formule de Stirling . . . . .	21
2.1.5 Fonction polygamma . . . . .	22
2.2 Séries de fractions rationnelles . . . . .	22
2.2.1 Expression à l'aide de la fonction digamma . . . . .	22
2.2.2 Quelques séries remarquables . . . . .	25
2.3 Nombres de Bernoulli et d'Euler . . . . .	26
2.3.1 Nombres de Bernoulli . . . . .	26
2.3.2 Nombres d'Euler . . . . .	28
2.4 Développements asymptotiques . . . . .	29
2.4.1 Transformation de Laplace . . . . .	29
2.4.2 Développement asymptotique de la fonction gamma . . . . .	31
2.5 Fonction zêta . . . . .	32
2.5.1 Fonction zêta de Riemann . . . . .	32
2.5.2 Fonction zêta de Hurwitz . . . . .	34

Exercices du chapitre 2 . . . . .	36
<b>Chapitre 3 : Fonctions hypergéométriques . . . . .</b>	<b>39</b>
3.1 Séries et fonctions hypergéométriques . . . . .	39
3.2 Fonctions hypergéométriques usuelles . . . . .	42
3.2.1 Cas où $s = 0$ . . . . .	42
3.2.2 Cas où $s = 1$ . . . . .	42
3.2.3 Fonction sinus intégral . . . . .	43
3.3 Fonctions hypergéométriques modifiées . . . . .	44
3.4 Dérivées et équations différentielles . . . . .	45
3.5 Prolongement analytique lorsque $r = s + 1$ . . . . .	47
3.6 Relations de contiguïté . . . . .	49
3.7 Confluence . . . . .	51
3.8 Intégrale d'Euler-Pochhammer . . . . .	53
Exercices du chapitre 3 . . . . .	55
<b>Chapitre 4 : Fonction hypergéométrique de Gauss . . . . .</b>	<b>59</b>
4.1 Définition, premières propriétés et exemples . . . . .	59
4.2 Relations de contiguïté . . . . .	62
4.3 Solutions de l'équation hypergéométrique . . . . .	63
4.3.1 Solutions lorsque $0 < x < 1$ . . . . .	63
4.3.2 Solutions lorsque $x > 1$ . . . . .	66
4.3.3 Solutions lorsque $x < 0$ . . . . .	67
4.4 Formules de transformation . . . . .	69
4.4.1 Formules d'Euler et Gauss . . . . .	69
4.4.2 Formule de Clausen . . . . .	70
4.5 Formules sommatoires . . . . .	72
4.5.1 Gauss et Vandermonde . . . . .	72
4.5.2 Bailey, Kummer, et encore Gauss . . . . .	73
4.6 Étude au voisinage de 1 . . . . .	75
Exercices du chapitre 4 . . . . .	79
<b>Chapitre 5 : Intégrales elliptiques . . . . .</b>	<b>83</b>
5.1 Longueur d'un arc d'ellipse . . . . .	83
5.2 Intégrale elliptique complète de première espèce . . . . .	85
5.3 Intégrales elliptiques complètes . . . . .	87
5.4 Moyenne arithmético-géométrique de Gauss . . . . .	89
5.5 Fonctions de Jacobi . . . . .	92
5.5.1 Définition et premières propriétés . . . . .	92
5.5.2 Equation du pendule simple . . . . .	94

5.5.3	Applications au calcul intégral . . . . .	95
	Exercices du chapitre 5 . . . . .	98
<b>Chapitre 6 : Fonction hypergéométrique de Kummer . . . . .</b>		<b>101</b>
6.1	Définition et exemples . . . . .	101
6.2	Propriétés générales . . . . .	103
6.2.1	Identité de Kummer . . . . .	103
6.2.2	Relations de contiguïté . . . . .	104
6.2.3	Solutions de l'équation hypergéométrique confluyente . . . . .	104
	Exercices du chapitre 6 . . . . .	106
<b>Chapitre 7 : Fonctions de Bessel . . . . .</b>		<b>109</b>
7.1	Equation de Bessel . . . . .	109
7.2	Fonction de Bessel de première espèce . . . . .	112
7.2.1	Relations de contiguïté et dérivées . . . . .	112
7.2.2	Première représentation intégrale . . . . .	113
7.2.3	Deuxième représentation intégrale . . . . .	114
7.2.4	Développement asymptotique et zéros . . . . .	116
7.2.5	Intégrales de Lommel . . . . .	117
7.3	Fonction de Bessel de deuxième espèce . . . . .	118
7.3.1	Définition et représentation intégrale . . . . .	118
7.3.2	Développement en série . . . . .	120
7.3.3	Retour sur l'équation de Bessel . . . . .	121
	Exercices du chapitre 7 . . . . .	122
<b>Chapitre 8 : Fonction polylogarithme . . . . .</b>		<b>125</b>
8.1	Généralités et exemples fondamentaux . . . . .	125
8.1.1	Définition et propriétés générales . . . . .	125
8.1.2	Dilogarithme . . . . .	127
8.1.3	Trilogarithme . . . . .	129
8.2	Polylogarithme de variable complexe . . . . .	130
8.2.1	Introduction . . . . .	130
8.2.2	Fonction de Clausen . . . . .	132
8.2.3	Fonction polytangente inverse . . . . .	133
8.2.4	Logarithme de variable complexe . . . . .	134
8.3	Intégrales et séries . . . . .	136
8.3.1	Utilisation de la fonction de Clausen . . . . .	136
8.3.2	Utilisation du polylogarithme de variable réelle . . . . .	138
8.4	Formules BBP . . . . .	140
8.4.1	Définition et exemples . . . . .	140

8.4.2	Formules BBP et polylogarithme . . . . .	142
	Exercices du chapitre 8 . . . . .	144
<b>Chapitre 9</b>	<b>Polynômes orthogonaux classiques . . . . .</b>	<b>147</b>
9.1	Suites de polynômes orthogonaux . . . . .	147
9.1.1	Généralités . . . . .	147
9.1.2	Relation de récurrence . . . . .	149
9.1.3	Zéros des polynômes orthogonaux . . . . .	150
9.1.4	Formules de Rodrigues . . . . .	151
9.2	Polynômes de Jacobi . . . . .	152
9.2.1	Définition et propriétés générales . . . . .	152
9.2.2	Polynômes de Gegenbauer . . . . .	158
9.2.3	Polynômes de Legendre . . . . .	159
9.2.4	Polynômes de Tchebychev . . . . .	161
9.3	Polynômes de Laguerre . . . . .	164
9.4	Polynômes d’Hermite . . . . .	166
	Exercices du chapitre 9 . . . . .	168
<b>Chapitre 10</b>	<b>Fonctions <math>q</math>-hypergéométriques . . . . .</b>	<b>171</b>
10.1	Introduction . . . . .	171
10.1.1	Symbole de Watson et coefficients $q$ -binomiaux . . . . .	171
10.1.2	$q$ -dérivée et $q$ -intégrale . . . . .	173
10.1.3	Fonctions $q$ -exponentielle et $q$ -logarithme . . . . .	176
10.2	Fonctions $q$ -hypergéométriques usuelles . . . . .	178
10.2.1	Introduction et premiers exemples . . . . .	178
10.2.2	Fonction $q$ -hypergéométrique de Heine . . . . .	181
10.3	Deux formules sommatoires . . . . .	183
	Exercices du chapitre 10 . . . . .	185
<b>Annexes</b>	<b>. . . . .</b>	<b>187</b>
	Annexe 1 : Fonction de Lerch . . . . .	187
	Annexe 2 : Fonctions analytiques de variable réelle . . . . .	188
	A.2.1 Introduction . . . . .	188
	A.2.2 Prolongement analytique . . . . .	193
	A.2.3 Systèmes différentiels à coefficients analytiques . . . . .	193
	Annexe 3 : Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	195
	Annexe 4 : Théorème de la phase stationnaire . . . . .	197
<b>Solutions des exercices</b>	<b>. . . . .</b>	<b>201</b>
	Exercices du chapitre 1 . . . . .	201
	Exercices du chapitre 2 . . . . .	207

Exercices du chapitre 3 . . . . .	218
Exercices du chapitre 4 . . . . .	226
Exercices du chapitre 5 . . . . .	239
Exercices du chapitre 6 . . . . .	246
Exercices du chapitre 7 . . . . .	254
Exercices du chapitre 8 . . . . .	266
Exercices du chapitre 9 . . . . .	276
Exercices du chapitre 10 . . . . .	284
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>293</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>295</b>