PROBLEME XV – AMPLIFICATION RAMAN DANS UN GUIDE SILICIUM

Avant d'aborder ce problème, on pourra consulter le complément D qui présente les bases de la diffusion Raman stimulée. L'amplification optique par effet Raman dans les guides d'onde en silicium est une technique très prometteuse. En effet, le silicium présente un gain Raman très élevé dans l'infrarouge proche. Cependant, l'efficacité est limitée par la très forte absorption des porteurs libres causée par la génération d'électrons et de trous via l'absorption à deux photons. Le but de ce problème est d'étudier l'amplification Raman dans un guide silicium.

Considérons une onde pompe et une onde signal copropagatives, d'intensités respectives I_p et I_s, se propageant dans un guide silicium présentant du gain Raman, de l'absorption linéaire, de l'absorption à deux photons et de l'absorption des porteurs libres. Afin de simplifier le problème, nous allons faire les approximations suivantes :

- L'absorption ($\alpha > 0$) est la même pour les ondes pompe et signal.
- L'absorption à deux photons est négligeable par rapport à l'absorption des porteurs libres.

Dans ces conditions, les intensités vérifient les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_p}{dz} = -\alpha I_p - \gamma I_p I_s - \kappa\left(I_p^2 + I_s^2 + 4I_p I_s\right) I_p \\ \dfrac{dI_s}{dz} = -\alpha I_s + \gamma I_p I_s - \kappa\left(I_p^2 + I_s^2 + 4I_p I_s\right) I_s \end{cases} \tag{1}$$

où $\gamma > 0$ et $\kappa > 0$ sont respectivement les coefficients de gain Raman et d'absorption des porteurs libres. Dans le membre de droite, le premier terme est associé à l'absorption linéaire, le second à l'effet Raman et le dernier, à l'absorption des porteurs libres.

Malgré les hypothèses simplificatrices, le système (1) ne peut être résolu analytiquement. Nous allons donc faire une approximation supplémentaire qui consiste à remplacer le terme $I_p^2 + I_s^2 + 4I_p I_s$ par $\left(I_p + I_s\right)^2$. Cette approximation est drastique mais elle permet néanmoins de conserver le couplage entre l'effet Raman et l'absorption des porteurs libres. Le système (1) devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dI_p}{dz} = -\alpha I_p - \gamma I_p I_s - \kappa\left(I_p + I_s\right)^2 I_p \\ \dfrac{dI_s}{dz} = -\alpha I_s + \gamma I_p I_s - \kappa\left(I_p + I_s\right)^2 I_s \end{cases} \tag{2}$$

On se propose de déterminer les intensités $I_p(z)$ et $I_s(z)$. L'entrée du guide est placée en $z = 0$ et remplit le demi-espace $z > 0$. Les conditions aux limites sont $I_p(0) = I_{p_0}$ et $I_s(0) = I_{s_0}$.

1. On pose $I(z) = I_p(z) + I_s(z)$. $I(z)$ représente l'intensité totale.

   1.1. A partir du système d'équations (2), trouver l'équation différentielle vérifiée par $I(z)$.

   1.2. On pose $I(z) = f(z)e^{-\alpha z}$. Trouver l'équation vérifiée par la fonction $f(z)$.

   1.3. Intégrer l'équation pour $f(z)$ et exprimer le résultat en fonction de α, κ et $I_0 = I_{p_0} + I_{s_0}$.

   1.4. En déduire que l'intensité totale $I(z)$ s'écrit :

$$I(z) = \frac{I_0 e^{-\alpha z}}{\sqrt{1 - \frac{I_0^2 \kappa (1 - e^{-2\alpha z})}{\alpha}}} \tag{3}$$

2. Pour déterminer l'intensité du signal $I_s(z)$, nous allons suivre la procédure qui suit.

   2.1. Exprimer l'équation vérifiée par le signal en fonction de I, I_s et des constantes du problème.

   2.2. On pose $I_s(z) = I(z)g(z)$. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $g(z)$ en fonction de I et des constantes du problème.

   2.3. On pose $g(z) = 1/h(z)$. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $h(z)$ en fonction de I et des constantes du problème. L'équation différentielle pour $h(z)$ peut se résoudre par la méthode habituelle de variation de la constante cependant une méthode ne faisant pas appel à cette technique est proposée dans la question suivante.

   2.4. On pose enfin $h(z) = k(z) + 1$. Montrer que $k(z)$ vérifie l'équation :

$$\frac{dk}{dz} = -\gamma I k \tag{4}$$

   2.5. La relation (4) peut se mettre sous la forme :

$$k(z) = k(0)\exp(-\gamma J) \tag{5}$$

   où J est l'intégrale :

$$J = \int_0^z I(z)dz \tag{6}$$

   A l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$J = \frac{1}{\sqrt{\alpha\kappa}}[u(0) - u(z)] \tag{7}$$

où $u(z) = \text{Arcsin}\frac{e^{-\alpha z}}{a}$ et $a^2 = \frac{1+\kappa I_0^2/\alpha}{\kappa I_0^2/\alpha}$. On rappelle que $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}\, x$.

2.6. Montrer que $u(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$u(z) = \text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I(z)\right) \tag{8}$$

Dans la suite on travaillera avec cette expression de $u(z)$.

2.7. Exprimer $k(0)$ en fonction de I_{p_0} et I_{s_0}. Donner finalement l'expression de $k(z)$ en fonction de la longueur effective :

$$L_{eff}(z) = \frac{u(0) - u(z)}{\sqrt{\alpha\kappa} I_0} \tag{9}$$

2.8. En déduire l'expression de l'intensité du signal :

$$I_s(z) = \frac{I(z)}{1 + \frac{I_{p_0}}{I_{s_0}} \exp\left(-\gamma I_0 L_{eff}(z)\right)} \tag{10}$$

2.9. Montrer que l'intensité de la pompe s'écrit :

$$I_p(z) = \frac{I(z)}{1 + \frac{I_{s_0}}{I_{p_0}} \exp\left(\gamma I_0 L_{eff}(z)\right)} \tag{11}$$

3. Pour simplifier l'analyse, nous nous intéressons dans un premier temps au cas où il n'y a pas d'absorption des porteurs libres, c'est-à-dire lorsque $\kappa \to 0$.

3.1. Démontrer que dans ces conditions, la longueur effective se simplifie en :

$$L_{eff}(z) = \frac{1 - e^{-\alpha z}}{\alpha} \tag{12}$$

3.2. En déduire les expressions simplifiées des intensités $I(z)$, $I_p(z)$ et $I_s(z)$.

3.3. Le signal subit des pertes via l'absorption et du gain résultant du couplage Raman avec la pompe. Afin de déterminer la condition d'amplification, on doit chercher si $I_s(z)$ présente un maximum. Montrer que la dérivée dI_s/dz s'annule si la condition suivante est réalisée :

$$I_p(z) = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{13}$$

3.4. En déduire la condition nécessaire pour avoir du gain. On exprimera le résultat en fonction de $I_p(0)$, α et γ.

3.5. Tracer soigneusement sur une même figure les évolutions des intensités pompe et signal. Commenter les résultats.

4. On revient à nouveau vers le cas général et on s'intéresse maintenant à la condition d'amplification effective du signal. En effet, si l'effet cumulé de l'absorption linéaire et de celle due aux porteurs libres est supérieur au gain Raman, le signal ne pourra être amplifié.

4.1. Etudier le signe de dI/dz et tracer la courbe $I(z)$. Commenter le résultat.

4.2. Etudier le signe de du/dz et tracer la courbe $u(z)$. Préciser la valeur de $u(0)$.

4.3. Etudier le signe de dL_{eff}/dz et tracer la courbe $L_{eff}(z)$. Préciser les valeurs pertinentes. On notera $L_\infty = u(0)/\sqrt{\alpha\kappa}I_0$.

4.4. Déduire des questions précédentes le sens de variation de $I_p(z)$ et tracer la courbe $I_p(z)$. Commenter le résultat.

4.5. Montrer que la dérivée de I_s s'annule si la condition suivante est réalisée :

$$\frac{\gamma}{\alpha} I_p(z) = \frac{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}}{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha z})} \tag{14}$$

4.6. Montrer que la relation (14) conduit à trois évolutions différentes pour l'intensité signal. Dans quel(s) cas le signal est-il amplifié ?

4.7. On se restreint dans cette question au cas où $I_s(z)$ ne présente qu'un seul maximum. Dans ce cas, si la pente à l'origine est positive il y aura amplification du signal alors que si la pente est négative, le signal sera atténué tout le long de sa propagation. Démontrer que la tangente à l'origine $\left.\frac{dI_s}{dz}\right|_{z=0}$ est positive si la condition suivante est réalisée :

$$\gamma I_{p_0} \geq \kappa I_0^2 + \alpha \tag{15}$$

La relation (15) est donc la condition nécessaire pour que le signal soit amplifié au cours de la propagation. Donner l'interprétation physique de la relation (15).

4.8. Compte tenu des résultats précédents, tracer la courbe $I_s(z)$ dans le cas où la condition (15) est réalisée. Commenter les résultats.

SOLUTION

1. On pose $I(z) = I_p(z) + I_s(z)$.

1.1. En faisant la somme des deux équations du système (2) on trouve directement :

$$\frac{dI}{dz} = -\alpha I - \kappa I^3 \tag{16}$$

L'équation pour l'intensité totale ne fait plus intervenir l'effet Raman. I n'est sensible qu'à l'absorption linéaire et à l'absorption des porteurs libres.

1.2. En posant $I(z) = f(z)e^{-\alpha z}$ on aboutit à l'équation vérifiée par la fonction $f(z)$:

$$\frac{df}{dz} = -\kappa f^3 e^{-2\alpha z} \tag{17}$$

1.3. L'équation (17) peut se mettre sous la forme :

$$-\frac{df}{f^3} = \kappa e^{-2\alpha z} dz \tag{18}$$

On intègre (18) entre 0 et z :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2(z)} - \frac{1}{f^2(0)}\right) = -\frac{\kappa}{2\alpha}\left(e^{-2\alpha z} - 1\right) \tag{19}$$

En tenant compte de la condition initiale $f(0) = I(0) = I_0$, on aboutit facilement à l'expression de $f(z)$:

$$f(z) = \frac{I_0}{\sqrt{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha z}\right)}} \tag{20}$$

1.4. L'intensité totale $I(z)$ s'écrit :

$$I(z) = \frac{I_0 e^{-\alpha z}}{\sqrt{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha z}\right)}} \tag{21}$$

2. Dans cette partie, nous allons déterminer l'intensité du signal $I_s(z)$.

2.1. En remplaçant I_p par $I - I_s$ dans l'équation d'évolution du signal, on obtient :

$$\frac{dI_s}{dz} = -\alpha I_s + \gamma I I_s - \gamma I_s^2 - \kappa I^2 I_s \tag{22}$$

2.2. On pose $I_s(z) = I(z)g(z)$. L'équation (22) devient :

$$\frac{dI_s}{dz} = \frac{dI}{dz} g + I \frac{dg}{dz} = -\alpha I g + \gamma I^2 g - \gamma I^2 g^2 - \kappa I^3 g$$

soit :

$$(-\alpha I - \kappa I^3) g + I \frac{dg}{dz} = -\alpha I g + \gamma I^2 g - \gamma I^2 g^2 - \kappa I^3 g$$

Après simplification, on trouve l'équation d'évolution de la fonction g :

$$\frac{dg}{dz} = \gamma I g(1 - g) \tag{23}$$

2.3. En posant $g(z) = 1/h(z)$, l'équation (23) devient :

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{1}{h^2}\frac{dh}{dz} = \gamma I \frac{1}{h}\left(1 - \frac{1}{h}\right)$$

D'où :

$$\frac{dh}{dz} = -\gamma I(h - 1) \tag{24}$$

Afin d'être complet nous donnons brièvement quelques détails sur la résolution directe de (24). La solution de l'équation sans second membre $\frac{dh}{dz} = -\gamma I h$ s'écrit formellement $h(z) = C\exp\left[-\gamma \int_0^z I(z)dz\right]$. La solution générale à (24) est recherchée en considérant que la constante C est une fonction de z, $C(z)$. Dans ces conditions en reportant dans (24), on trouve que $C(z)$ vérifie l'équation différentielle $\frac{dC}{dz} = \gamma I \exp\left[\gamma \int_0^z I(z)dz\right]$. Cette dernière équation s'intègre directement $C(z) = \exp\left[\gamma \int_0^z I(z)dz\right] + B$ où B est une constante. On aboutit finalement à la fonction $h(z)$:

$$h(z) = C(z)\exp\left[-\gamma \int_0^z I(z)dz\right] = B\exp\left[-\gamma \int_0^z I(z)dz\right] + 1$$

2.4. On pose $h(z) = k(z) + 1$. On obtient directement :

$$\frac{dk}{dz} = -\gamma I k \tag{25}$$

2.5. En mettant la relation (25) sous la forme $\frac{dk}{k} = -\gamma I dz$ et en intégrant entre 0 et z, on peut écrire formellement sous la forme :

$$k(z) = k(0)\exp(-\gamma J) \tag{26}$$

où $J = \int_0^z I(z)dz = \int_0^z \frac{I_0 e^{-\alpha z}}{\sqrt{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha z})}} dz$, soit :

$$J = \int_0^z \frac{I_0}{\sqrt{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}}} \frac{e^{-\alpha z}}{\sqrt{1 + \frac{I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}}{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}} e^{-2\alpha z}}} dz = \int_0^z \sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \frac{e^{-\alpha z}/a}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha z}/a^2}} dz \tag{27}$$

où on a posé $a^2 = \frac{1 + I_0^2 \kappa/\alpha}{I_0^2 \kappa/\alpha}$. On pose enfin $X = e^{-\alpha z}/a$:

$$J = -\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{\kappa}} \int_{1/a}^{e^{-\alpha z}/a} \frac{dX}{\sqrt{1 - X^2}} \tag{28}$$

Sous la forme (28) l'intégrale est calculable explicitement :

$$J = \frac{1}{\sqrt{\alpha\kappa}} \int_{e^{-\alpha z}/a}^{1/a} \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\kappa}} \left[\text{Arcsin}\frac{1}{a} - \text{Arcsin}\frac{e^{-\alpha z}}{a} \right]$$

On peut finalement mettre sous la forme suivante :

$$J = \frac{1}{\sqrt{\alpha\kappa}} [u(0) - u(z)] \tag{29}$$

avec :

$$u(z) = \text{Arcsin}\frac{e^{-\alpha z}}{a} \tag{30}$$

2.6. On peut partir de la définition de la tangente :

$$\text{tg}\, u = \frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\sin u}{\sqrt{1 - \sin^2 u}} = \frac{e^{-\alpha z}/a}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha z}/a^2}}$$

En développant, on trouve :

$$\text{tg}\, u = \frac{e^{-\alpha z}/a}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha z}/a^2}} = \frac{e^{-\alpha z}}{\sqrt{a^2 - e^{-2\alpha z}}} = \frac{I_0\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}\, e^{-\alpha z}}{\sqrt{1 + I_0^2 \frac{\kappa}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha z})}} = \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I(z)$$

On en déduit :

$$u(z) = \text{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I(z) \right) \tag{31}$$

2.7. En $z = 0$ on a :

$$k(0) = h(0) - 1 = \frac{1}{g(0)} - 1 = \frac{I(0) - I_s(0)}{I_s(0)} = \frac{I_p(0)}{I_s(0)} = \frac{I_{p_0}}{I_{s_0}} \tag{32}$$

En tenant compte des résultats (31) et (32), la relation (26) s'écrit :

$$k(z) = \frac{I_{p_0}}{I_{s_0}} \exp\left\{ -\gamma \frac{1}{\sqrt{\alpha\kappa}} [u(0) - u(z)] \right\}$$

Soit :

$$k(z) = \frac{I_{p_0}}{I_{s_0}} \exp(-\gamma I_0 L_{eff}(z)) \tag{33}$$

avec :

$$L_{eff}(z) = \frac{u(0) - u(z)}{\sqrt{\alpha\kappa} I_0} \tag{34}$$

2.8. Nous sommes maintenant en mesure d'écrire l'intensité du signal :

$$I_s(z) = I(z)g(z) = \frac{I(z)}{1+k(z)} = \frac{I(z)}{1+\frac{I_{p0}}{I_{s0}}\exp(-\gamma I_0 L_{eff}(z))} \tag{35}$$

2.9. Connaissant l'intensité totale ainsi que celle du signal, on peut en déduire l'intensité de la pompe :

$$I_p(z) = I(z) - I_s(z) = \frac{I\frac{I_{p_0}}{I_{s_0}}\exp(-\gamma I_0 L_{eff})}{1+\frac{I_{p_0}}{I_{s_0}}\exp(-\gamma I_0 L_{eff})}$$

que l'on peut simplifier en :

$$I_p(z) = \frac{I(z)}{1+\frac{I_{s_0}}{I_{p_0}}\exp(\gamma I_0 L_{eff}(z))} \tag{36}$$

3. Dans cette partie, on suppose que l'absorption non linéaire est nulle $\kappa \to 0$.

3.1. Dans ces conditions, l'intensité totale devient :

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z} \tag{37}$$

A l'ordre le plus bas, la fonction $u(z)$ s'écrit :

$$u(z) \cong \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I(z) = \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I_0 e^{-\alpha z}$$

La longueur effective devient :

$$L_{eff}(z) = \frac{u(0)-u(z)}{\sqrt{\alpha\kappa} I_0} \cong \sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}} I_0 \frac{1-e^{-\alpha z}}{\sqrt{\alpha\kappa} I_0}$$

D'où :

$$L_{eff}(z) = \frac{1-e^{-\alpha z}}{\alpha} \tag{38}$$

3.2. On déduit directement les expressions simplifiées des intensités $I_s(z)$ et $I_p(z)$:

$$I_s(z) = \frac{I_0 e^{-\alpha z}}{1+\frac{I_{p_0}}{I_{s_0}}\exp\left[-\frac{\gamma}{\alpha} I_0 (1-e^{-\alpha z})\right]} \tag{39}$$

$$I_p(z) = \frac{I_0 e^{-\alpha z}}{1+\frac{I_{s_0}}{I_{p_0}}\exp\left[\frac{\gamma}{\alpha} I_0 (1-e^{-\alpha z})\right]} \tag{40}$$