Chapitre 3

Algèbres de Lie

3.1 Définitions

• **Algèbres de Lie**
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}$**-algèbre** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(V, +, .)$ équipé d'une troisième loi :

$$V \times V \to V, (X, Y) \mapsto X \times Y$$

que l'on nomme multiplication interne. Cette loi est distributive à droite et à gauche relativement à l'addition :

$$\forall X, Y \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.(X \times Y) = (\lambda.X) \times Y) = X \times (\lambda.Y)$$

$$\forall X, Y, Z \in V, \quad (X + Y) \times Z) = (X \times Z) + (Y \times Z)$$
$$\forall X, Y, Z \in V, \quad X \times (Y + Z) = (X \times Y) + (X \times Z)$$

On peut résumer ces trois propriétés en disant que la multiplication interne est une application bilinéaire de $V \times V$ dans V.

Une $\mathbb{K}$-algèbre est associative lorsque la multiplication interne l'est :

$$\forall X, Y \in V, \quad X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z$$

Exemples :
1. Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$, $(End(V), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre associative.
2. $(GL(n, \mathbb{K}), +, ., \times)$, où l'on note $\times$ la multiplication des matrices, est une algèbre associative.
Mais les algèbres ne sont pas toutes associatives ; les **octonions** par exemple forment une algèbre non associative.

Une $\mathbb{K}$-**algèbre de Lie** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, que l'on note très usuellement par une lettre gothique minuscule [1], par exemple $\mathfrak{g}$. On équipe cet espace vectoriel d'une multiplication interne qu'il est d'usage de noter par un crochet, le **crochet de Lie** :

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (X, Y) \mapsto [X, Y] \tag{3.1}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

i. $[\ ,\ ]$ est bilinéaire (donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre au sens du premier paragraphe).

ii. $\forall\ X, Y \in \mathfrak{g}, \quad [X, Y] + [X, Y] = 0$ (**antisymétrie**)

iii. $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
(**identité de Jacobi**)

Rem 1 : L'antisymétrie impose que $\forall X \in \mathfrak{g}, \quad [X, X] = 0$.
Rem 2 : Sauf à avoir un crochet trivial les algèbres de Lie sont non associatives, l'identité de Jacobi remplace en quelque sorte l'associativité.

Le corps $\mathbb{K}$ peut être $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou encore un corps fini $\mathbb{F}_p$, mais toutefois dans la suite le corps sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une algèbre de Lie est souvent associée à un groupe de Lie G, il est alors d'usage de noter l'algèbre de Lie par la même lettre que le groupe mais en caractère gothique minuscule.

Exemple :
Le produit vectoriel $\wedge$ dans $\mathbb{R}^3$ est un crochet de Lie.
En effet, le produit vectoriel est bilinéaire et les propriétés *ii*. et *iii*. sont vérifiées. Notamment :

$$X \wedge (Y \wedge Z) + Y \wedge (Z \wedge X) + Z \wedge (X \wedge Y) = 0$$

• Constantes de structures
Soit $\mathfrak{g} = (V, \ [.,.]\ )$ une algèbre de Lie de dimension n (c'est-à-dire que l'espace vectoriel sous-jacent est de dimension n) et soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une base de V. Comme tous les vecteurs, les vecteurs $[X_i, X_j]$ sont des combinaisons linéaires des X_k. Les coefficients c_{ij}^k de la décomposition sont appelés **constantes de structure** de $\mathfrak{g}$:

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k \tag{3.2}$$

1. Cette notation provient du fait que la théorie des groupes et des algèbres a beaucoup été développée par les mathématiciens de langue allemande, lors de la seconde moitié du XIX^{e} siècle. Or, à l'époque, l'écriture gothique prévalait en Allemagne. Pour celui qui utilise couramment l'écriture romane, des confusions sont possibles, mais surtout en ce qui concerne certaines lettres capitales. Notamment le A s'écrit $\mathfrak{A}$, qui ressemble vaguement à un U. Il convient également de préciser que la version manuscrite de ces lettres est sensiblement différente de l'écriture imprimée (ce qui peut être encore plus source de confusion).

(on somme sur les indices répétés selon la convention d'Einstein, ici k). De l'antisymétrie on déduit que :

$$\forall i, j, k, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k \quad (= 0 \; si \; i = j)$$

et de l'identité de Jacobi que :

$$\forall i, j, k, l, \quad c_{il}^m c_{jk}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l = 0$$

• Sous-algèbre
Une **sous-algèbre de Lie** d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une partie $\mathfrak{h}$ satisfaisant :
i. $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$
ii. $\forall \; X, Y \in \mathfrak{h}$ alors $[X, Y] \in \; \mathfrak{h}$ ou de façon équivalente

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} \tag{3.3}$$

• Idéal
Un **idéal** de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une partie I satisfaisant :
i. I est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$.
ii. $\forall X \in \mathfrak{g}, \quad \forall i \in I, \quad [X, i] \in I$ ou de façon équivalente :

$$[\mathfrak{g}, I] \subset I \tag{3.4}$$

Les idéaux d'une algèbre de Lie sont *a fortiori* des sous-algèbres.

• Idéal maximal

Soit J un idéal de $\mathfrak{g}$. Cet idéal est **maximal** s'il n'existe aucun idéal I de $\mathfrak{g}$, autre que J ou $\mathfrak{g}$ tel que $J \subset I$.

• Algèbre de Lie quotient
Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et I un de ses idéaux. La relation sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$X \equiv X'[I] \Longleftrightarrow X - X' \in I$$

est une relation d'équivalence (c'est la relation de congruence modulo I). Celle-ci est compatible avec la structure d'algèbre de Lie :
i. du fait que I est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ découle la compatibilité avec la structure vectorielle :

$$\forall X, Y, X', Y' \in \mathfrak{g} \text{ si } X \equiv X'[I] \text{ et } Y \equiv Y'[I] \quad \text{alors } X + Y \equiv X'[I] + Y'[I]$$

$$\forall X, X' \in \mathfrak{g}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \text{ si } X \equiv X'[I] \qquad \text{alors } \alpha.X \equiv \alpha.X'[I]$$

ii. du fait que $\forall i \in I, \forall X \in \mathfrak{g}, [X,i] \in I$ découle la compatibilité avec le crochet de Lie :

$$\forall X, Y, X', Y' \in \mathfrak{g} \text{ si } X \equiv X'[I] \text{ et } Y \equiv Y'[I] \quad \text{alors } X - X' \in I \text{ et } Y - Y' \in I$$

donc :

$$\exists i_X, i_Y \in I \text{ tels que } \quad X' = X + i_X, Y' = Y + i_Y$$

et :

$$[X,Y] - [X',Y'] = [X, i_Y] + [i_X, Y] - [i_X, i_Y] \in I$$

La classe d'équivalence d'un élément X est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont en relation avec cet élément, on la note $\overline{X}^I$. On a :

$$\overline{X}^I = \{X' \in \mathfrak{g}/X' = X + i, \ \text{ pour } \ i \ \text{ un élément de } \ I\} = X + I$$

Les compatibilités avec la structure vectorielle et le crochet de Lie rendent cohérentes les définitions suivantes :

i. $\overline{X}^I + \overline{Y}^I = \overline{(X+Y)}^I$ (addition des classes)
ii. $\alpha.\overline{X}^I = \overline{\alpha.X}^I$ (multiplication d'une classe par un scalaire)
iii. $[\overline{X}^I, \overline{Y}^I] = \overline{[X,Y]}^I$ (crochet de Lie de deux classes)

L'ensemble des classes est appelé **ensemble quotient** de $\mathfrak{g}$ par I, il est noté $\mathfrak{g}/_I$. Muni de l'addition des classes, de la multiplication des classes par un scalaire et du crochet de Lie des classes, cet ensemble est une algèbre de Lie.

• **Centre**

De manière générale lorsqu'un ensemble E est muni d'une loi de composition interne $E \times E \to E, (x,y) \mapsto x * y$, on appelle **centre** de E (relativement à $*$) l'ensemble des éléments de E qui commutent avec tous les éléments de E. On le note en général $Z(E)$. Autrement dit :

$$Z(E) = \{x \in E \ tq \ \forall y \in E, \quad x * y = y * x\} \tag{3.5}$$

On a :

$$* \text{ commutative } \iff Z(E) = E \tag{3.6}$$

Le centre $Z(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est son centre relatif au crochet de Lie, autrement dit :

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ tq \ \forall Y \in \mathfrak{g}, \quad [X,Y] = [Y,X]\}$$

Comme on a $\forall X \in \mathfrak{g}, \quad [X,X] = 0$, si on applique cette propriété au vecteur $X + Y$ on obtient $[X+Y, X+Y] = 0$, en utilisant la bilinéarité du crochet il vient $[X,X] + [X,Y] + [Y,X] + [Y,Y] = 0$ et donc $[X,Y] = -[Y,X]$.

La condition :
$$\forall Y \in \mathfrak{g},\ [X,Y] = [Y,X]$$
est donc équivalente à :
$$\forall Y \in \mathfrak{g}, [X,Y] = 0$$
Le centre peut donc se ré-écrire :
$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}\ tq\ \forall Y \in \mathfrak{g}, \quad [X,Y] = 0\}$$
Le crochet est commutatif lorsque : $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, autrement dit lorsque, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X,Y] = 0$. Dans ce cas on dit que l'algèbre de Lie est abélienne.

• **Centralisateur et normalisateur**
Soit E un ensemble équipé d'une loi de composition interne $*$ et soit P une partie de E. Le **centralisateur** de P est la partie de E formée des éléments de E qui commutent avec tous les éléments de P.
Dans le cas des algèbres de Lie, le centralisateur d'une partie P de $\mathfrak{g}$ est relatif au crochet :
$$Z(P) = \{X \in \mathfrak{g}\ tq\ \forall Y \in P, \quad [X,Y] = 0\}$$
L'identité de Jacobi implique que $Z(P)$ est toujours une sous-algèbre de Lie.
Soit E est un ensemble équipé d'une loi de composition interne $*$. Soit P une partie de E, le **normalisateur** de P est la partie de E formée des éléments x de E tels que $x * P = P * x$ (attention : ceci ne signifie nullement que les x en question commutent individuellement avec les éléments de P).
Dans le cas des algèbres de Lie, le normalisateur d'une partie P de $\mathfrak{g}$ serait :
$$N(P) = \{X \in \mathfrak{g}\ tq\ \{[X,Y], Y \in P\} = \{[Y,X], Y \in P\}\}$$
Soit $(A, +, ., \times)$ une algèbre associative. Si on pose pour X et Y pris dans A, $[X,Y] = X \times Y - Y \times X$ alors $(A, +., [,])$ est une algèbre de Lie, $\mathfrak{a}$, que l'on dit liée à $(A, +, ., \times)$. L'algèbre associative A est appelée **l'algèbre enveloppante** de $\mathfrak{a}$.
Les algèbres de Lie associées à $(End(V), +, ., \circ)$ et $(GL(n,\mathbb{K}), +, ., \times)$ sont notées $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$, ce sont les **algèbres de Lie générales linéaires**.
Lorsque V est de dimension finie, l'isomorphisme entre $(End(V), +, ., \circ)$ et $(GL(n,\mathbb{K}), +, ., \times)$, obtenu grâce au choix d'une base de V, reste un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathfrak{gl}(V)$ et l'algèbre $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

3.2 Relation avec les groupes de Lie

Un groupe de Lie est un ensemble G muni simultanément de deux structures, une structure de groupe et une structure de variété différentiable avec une compatibilité entre ces deux structures : la loi de groupe et l'inversion sont des applications continues. Dans ce cas l'espace tangent en l'élément neutre du groupe est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Les physiciens ont coutume de dire que G est un groupe continu. Dans la situation qui nous préoccupe ici, les groupes de Lie que nous considérerons sont des groupes de matrices. Lorsqu'on se place en un point x_0 d'une variété $M^{(n)}$ de dimension n, l'espace tangent en x_0 à $M^{(n)}$ est un espace vectoriel $T_{x_0}M^{(n)}$ de dimension n. Si on considère une « courbe » lisse tracée sur $M^{(n)}$, $t \mapsto x(t)$ qui passe par x_0 au temps $t = 0$, le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$ est un vecteur de $T_{x_0}M^{(n)}$. Deux courbes distinctes passant par x_0 à l'instant $t = 0$ avec le même vecteur vitesse définissent le même vecteur tangent. L'application de l'espace tangent $T_{x_0}M^{(n)}$ vers $M^{(n)}$, qui consiste à « enrouler » l'espace tangent sur la variété, est appelée application exponentielle au point x_0. On la note exp_{x_0}. Elle est définie sur un voisinage du vecteur nul de $T_{x_0}M^{(n)}$, et l'envoie sur un voisinage dans $M^{(n)}$ de x_0 [2].

Exemple fondamental : Le groupe de Lie duquel tous les exemples seront tirés est le groupe $GL(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des matrices inversibles de taille n. Ce groupe est un groupe de Lie de dimension n^2. En effet, $GL(n, \mathbb{K})$ est une partie de l'ensemble des matrices $n \times n$ qui s'identifie canoniquement à l'espace $\mathbb{K}^{n^2}$, qui est une variété différentiable de dimension n^2 (on prend la structure différentielle usuelle). $GL(n, \mathbb{K})$ est une sous-variété différentiable de dimension n^2 de $\mathbb{K}^{n^2}$ [3].

Soit $t \mapsto M(t)$ une courbe continue et lisse, tracée dans le groupe de Lie $GL(n, \mathbb{K})$, telle que $M(0) = Id$. Elle définit un vecteur tangent en Id à $GL(n, \mathbb{K})$ au point Id (c'est-à-dire un élément de l'algèbre de Lie associée au groupe $GL(n, \mathbb{K})$) qui peut lui-même être vu comme la matrice dérivée à l'instant $t = 0$, soit $M'(0)$). Ce vecteur est un élément de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, mais bien entendu la matrice correspondante peut être de déterminant nul (la courbe peut avoir un vecteur-vitesse nulle au temps $t = 0$ par exemple). De fait, l'espace tangent en question est tout simplement l'espace des matrices carrées et son crochet de Lie est le commutateur. Autrement dit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées muni du crochet $[A, B] = AB - BA$. Pour un élément X dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

$$exp_{Id}(X) = Id + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots \tag{3.7}$$

2. l'exponentielle $\theta \mapsto e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$ peut être vue comme l'enroulement sur le cercle de la droite tangente au cercle trigonométrique au point $(1, 0)$.

3. Si M est une matrice inversible, il existe un voisinage de M qui ne contient que des matrices inversibles, car l'application déterminant est continue. Ce résultat n'est qu'une généralisation banale de l'observation suivante : dans le cas où $n = 1$ l'ensemble des matrices réelles s'identifie à $\mathbb{R}$, celui des matrices inversibles à $\mathbb{R}^*$, qui est bien une sous-varitété de même dimension que $\mathbb{R}$.

Comme on l'a dit plus haut, une manière géométrique d'envisager les choses est de dire que l'on prend une matrice de l'espace tangent à $GL(n,\mathbb{K})$ en Id, l'exponentielle l'envoie sur un élément du groupe que l'on note $exp_{Id}(X)$. En fait comme on ne s'occupera que de l'espace tangent en Id, on omet l'indice Id dans l'exponentielle.
Soit $X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ fixé. La courbe tracée dans $GL(n,\mathbb{K})$ définie par $t \mapsto exp(tX)$ est un groupe appelé **groupe à un paramètre** déterminé par X. On a ainsi $exp\,(tX)\,exp\,(t'X) = exp((t+t')X)$.
Comme on l'a dit, l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}\,(n,\mathbb{K})$ admet comme ensemble sous-jacent l'ensemble des matrices carrées quelconques $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, qui est une algèbre associative pour l'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication des matrices. Par conséquent l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}\,(n,\mathbb{K})$ est dite algèbre de Lie associée. Le crochet de Lie est alors simplement le commutateur.
Remarquons enfin que l'on a les développements limités en $t = 0$:

$$exp\,(tX)\,.Y.exp\,(-tX) = Y + t\,[X,Y] + (t) \tag{3.8}$$

et :

$$exp\,(tX)\,.exp\,(tY)\,.exp\,(-tX)\,exp\,(-tY) = Id + t^2\,[X,Y] + (t^2) \tag{3.9}$$

Exemple 1 : L'ensemble des matrices de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de Lie du groupe $GL(n,\mathbb{K})$ que l'on note $SL(n,\mathbb{K})$. Ce groupe est appelé **groupe spécial linéaire**. Il a pour algèbre de Lie l'ensemble des matrices X de trace nulle, $(tr(X) = 0)$. Cette dernière est l'**algèbre de Lie spéciale linéaire**, notée $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.
Une base de l'algèbre $\mathfrak{sl}\,(2,\mathbb{C})$ est fournie par les trois matrices :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le lecteur vérifiera aisément que :

$$[H,E_+] = 2E_+ \quad [H,E_-] = -2E_- \quad [E_+,E_-] = H \tag{3.10}$$

On a $\mathfrak{sl}\,(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ telle que $tr(X) = 0\}$ et $SL\,(n,\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ telle que $det(M) = 1\}$. Une matrice de $SL(n,\mathbb{K})$ s'obtenant comme exponentielle d'une matrice de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$, si $M = exp\,(tX)$, on a la relation :

$$1 = det(M) = \det\,(exp\,(tX)) = exp\,(t\;Tr(X)) = exp(0) \tag{3.11}$$

Exemple 2 : L'ensemble des matrices orthogonales, c'est-à-dire satisfaisant $M^{\mathsf{T}} = M^{-1}$ (ou si on préfère $M^{\mathsf{T}}M = Id$) forment un sous-groupe de Lie $O(n,\mathbb{K})$ de $GL(n,\mathbb{K})$. Si $t \mapsto M(t)$ est une courbe lisse tracée dans ce sous-groupe telle que $M(0) = Id$, on a, pour tout t, $M(t)^{\mathsf{T}}M(t) = Id$. Dérivons cette relation par rapport à t en $t = 0$. Il vient :

$$M'(0)^{\mathsf{T}}.M(0) + M(0)^{\mathsf{T}}.M'(0) = M^{\mathsf{T}'}(0) + M'(0) = 0 \tag{3.12}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}\,(n, \mathbb{K})$ associée est donc l'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$, soit :

$$\left\{ X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})\ tq\ X + X^{\mathsf{T}} = 0 \right\} \tag{3.13}$$

Les trois matrices :

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

constituent une base de $\mathfrak{o}\,(3, \mathbb{R})$. Le groupe à un paramètre associé à la matrice :

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est l'ensemble des matrices de la forme :

$$exp(R_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(t) & -sin(t) \\ 0 & sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$$

Le calcul n'est pas très difficile : on décompose la matrice en deux blocs diagonaux, un 1×1 (nul), le second 2×2 (correspondant au complexe $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ dans l'identification usuelle, $t = \frac{\pi}{2}$), l'exponentielle se calcule alors aisément.
C'est pourquoi les physiciens ont l'habitude de dire que les matrices R_x, R_y et R_z représentent respectivement les rotations « infinitésimales » autour des axes $x,\ y$ et z d'un trièdre trirectangle dans $\mathbb{R}^3$. On montre que :

$$[R_x, R_y] = R_z \quad [R_y, R_z] = R_x \quad [R_z, R_x] = R_y \tag{3.14}$$

(on remarque que les deux dernières relations sont obtenues par permutation circulaire sur $\{R_x, R_y, R_z\}$ à partir de la première).
Enfin, précisons que le groupe orthogonal réel a deux composantes connexes : les isométries conservant l'orientation, qui forment un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$ (appelé groupe spécial orthogonal, noté $SO(n, \mathbb{R})$) et celles qui la renversent, ce sont les symétries, mais celles-ci ne forment pas un sous-groupe de $O(n, \mathbb{R})$. Les deux groupes de Lie $O(n, \mathbb{R})$ et $SO(n, \mathbb{R})$ ont le même espace tangent en Id, et donc génèrent la même algèbre de Lie. On notera donc indifféremment