

Chapitre IV

Incertitudes de mesure sur les grandeurs d'entrée

Une part importante du travail expérimental est l'estimation de l'incertitude-type $u(X_i)$ de chaque grandeur mesurée de X_i . Trois méthodes, issues de la statistique classique, existent :

- la méthode d'obtention des incertitudes de type A ;
- la méthode de l'étendue ;
- la méthode d'obtention des incertitudes de type B.

Elles vont être abordées dans les paragraphes suivants.

1 Méthode d'obtention des incertitudes de type A

La méthode de type A est fondée sur l'étude statistique d'un n – échantillon d'une distribution de la grandeur aléatoire X que l'on cherche à mesurer (moyenne μ et variance σ_X^2). Ce n – échantillon est constitué d'une série de n mesures x_i répétées et indépendantes de la grandeur X . Dans le chapitre I, nous avons vu que la moyenne μ et la variance σ_X^2 de la distribution entière de X sont reliées à celles du n – échantillon de X . Il a été démontré que la moyenne arithmétique du n – échantillon de X est une estimation de celle de sa distribution entière,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

et que l'écart type de la distribution entière, appelé écart type expérimental $s(X)$, peut être estimé par la relation

$$s(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

L'incertitude-type $u(X)$ est alors telle que

$$u(X) = s(\bar{x}) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}}.$$

Quand des valeurs semblent aberrantes ou suspectes, leur élimination doit se faire selon un critère établi par des statisticiens.

Une première méthode, établie théoriquement, est la suivante. On classe par ordre croissant les valeurs mesurées. Deux valeurs peuvent être considérées suspectes, la première ou la $n^{\text{ième}}$. On calcule

$$t = \frac{x_{\text{suspecte}} - m}{\sqrt{\frac{n \sum_i (x_i - m)^2}{(n-1)(n-2)}}}$$

où m est la moyenne des valeurs considérées correctes, égale à

- $m_1 = \frac{\sum_{i=2}^n x_i}{n-1}$ si la valeur x_1 est considérée suspecte ;
- $m_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}$ si la valeur x_n est considérée suspecte.

La loi de distribution théorique d'échantillonnage qui décrit la distribution de cet écart réduit t est la loi de Student. On élimine la valeur suspecte x_{suspecte} quand t est supérieur à la valeur donnée dans le tableau de cette distribution pour un intervalle de confiance donné (généralement 95 %).

Une seconde méthode repose sur le test du khi-deux. A la base, ce test est un test basé sur les différences entre les effectifs observés et les effectifs espérés. Si on les note respectivement O_i et E_i . On calcule la somme des écarts au carré sur la valeur théorique attendue, que l'on appelle « khi-deux »

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}.$$

On utilise alors une table qui représente la probabilité que l'hypothèse soit rejetée alors qu'elle est vraie, appelée distribution du khi-deux. Suivant la valeur de χ^2 et le nombre de degrés de liberté $n - 1$ on détermine si l'hypothèse est acceptable. En général, on choisit une probabilité critique de 5 %, en-dessous de laquelle on envisage de rejeter l'hypothèse. La loi de probabilité de χ^2 est programmée dans la librairie Python `scipy.stat`. Cette fonction est notée `chi2`.

Bien que ces deux méthodes soient bien établies sur le plan mathématique, ce ne sont pas celles préconisées dans la norme. Les méthodes préconisées sont celles de Cochran et de Grubbs présentées après les tables de Student et du Khi-deux fournies ci-dessous (Tableau 4 et Tableau 5).

Tableau 4 – Table du coefficient de Student.

Coefficient de Student t	Confiance (%)									
	50,0	80,0	90,0	95,0	98,0	99,0	99,5	99,8	99,9	
Nombre de degrés de liberté (taille de l'échantillon moins le nombre de paramètres)	1	1,00	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,31	636,62
	2	0,82	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	14,09	22,33	31,60
	3	0,76	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
	4	0,74	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
	5	0,73	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
	6	0,72	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
	7	0,71	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,79	5,41
	8	0,71	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
	9	0,70	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,30	4,78
	10	0,70	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,14	4,59
	11	0,70	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,02	4,44
	12	0,70	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	3,93	4,32
	13	0,69	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,85	4,22
	14	0,69	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,79	4,14
	15	0,69	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	3,73	4,07
	16	0,69	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	3,69	4,01
	17	0,69	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,65	3,97
	18	0,69	1,33	1,73	2,1	2,55	2,88	3,20	3,61	3,92
	19	0,69	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,58	3,88
	20	0,69	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85	3,15	3,55	3,85
	22	0,69	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,50	3,79
	24	0,68	1,32	1,71	2,06	2,49	2,8	3,09	3,47	3,75
	26	0,68	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,43	3,71
	28	0,68	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,41	3,67
	30	0,68	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,39	3,65
	40	0,68	1,3	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,31	3,55
	50	0,68	1,3	1,68	2,01	2,40	2,68	2,94	3,26	3,50
	60	0,68	1,3	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,23	3,46
	70	0,68	1,29	1,67	1,99	2,38	2,65	2,90	3,21	3,44
	80	0,68	1,29	1,66	1,99	2,37	2,64	2,89	3,20	3,42
90	0,68	1,29	1,66	1,99	2,37	2,63	2,88	3,18	3,40	
100	0,68	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63	2,87	3,17	3,39	
200	0,68	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60	2,84	3,13	3,34	
300	0,68	1,28	1,65	1,97	2,34	2,59	2,83	3,12	3,32	
500	0,67	1,28	1,65	1,96	2,33	2,59	2,82	3,11	3,31	
1000	0,67	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	2,81	3,10	3,30	
∞	0,67	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,09	3,29	

Python: from scipy import stats
t = t.interval(pvalue,dfreedom) [1]

Tableau 5 – Table du khi-deux

χ^2		Probabilité de rejeter l'hypothèse alors qu'elle est vraie (%)										
		99	90	75	50	30	20	10	5	2	1	0,1
Nombre de degrés de liberté	1	0,000157	0,0158	0,102	0,455	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,63	10,8
	2	0,0201	0,211	0,575	1,39	2,41	3,22	4,61	5,99	7,82	9,21	13,8
	3	0,115	0,584	1,21	2,37	3,66	4,64	6,25	7,81	9,84	11,3	16,3
	4	0,297	1,06	1,92	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,7	13,3	18,5
	5	0,554	1,61	2,67	4,35	6,06	7,29	9,24	11,1	13,4	15,1	20,5
	6	0,872	2,20	3,45	5,35	7,23	8,56	10,64	12,6	15,0	16,8	22,5
	7	1,24	2,83	4,25	6,35	8,38	9,80	12,02	14,1	16,6	18,5	24,3
	8	1,65	3,49	5,07	7,34	9,52	11,03	13,36	15,5	18,2	20,1	26,1
	9	2,09	4,17	5,90	8,34	10,7	12,24	14,68	16,9	19,7	21,7	27,9
	10	2,56	4,87	6,74	9,34	11,8	13,44	15,99	18,3	21,2	23,2	29,6
	11	3,05	5,58	7,58	10,3	12,9	14,63	17,28	19,7	22,6	24,7	31,3
	12	3,57	6,30	8,44	11,3	14,0	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
	13	4,11	7,04	9,30	12,3	15,1	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,5
	14	4,66	7,79	10,2	13,3	16,2	18,15	21,06	23,7	26,9	29,1	36,1
	15	5,23	8,55	11,0	14,3	17,3	19,31	22,31	25,0	28,3	30,6	37,7
	16	5,81	9,31	11,9	15,3	18,4	20,47	23,54	26,3	29,6	32,0	39,3
	17	6,41	10,1	12,8	16,3	19,5	21,61	24,77	27,6	31,0	33,4	40,8
	18	7,01	10,9	13,7	17,3	20,6	22,76	25,99	28,9	32,3	34,8	42,3
	19	7,63	11,7	14,6	18,3	21,7	23,90	27,20	30,1	33,7	36,2	43,8
	20	8,26	12,4	15,5	19,3	22,8	25,04	28,41	31,4	35,0	37,6	45,3
	21	8,90	13,2	16,3	20,3	23,9	26,17	29,62	32,7	36,3	38,9	46,8
	22	9,5	14,0	17,2	21,3	24,9	27,30	30,81	33,9	37,7	40,3	48,3
	23	10,2	14,8	18,1	22,3	26,0	28,43	32,01	35,2	39,0	41,6	49,7
	24	10,9	15,7	19,0	23,3	27,1	29,55	33,20	36,4	40,3	43,0	51,2
	25	11,5	16,5	19,9	24,3	28,2	30,68	34,38	37,7	41,6	44,3	52,6
	26	12,2	17,3	20,8	25,3	29,2	31,79	35,56	38,9	42,9	45,6	54,1
	27	12,9	18,1	21,7	26,3	30,3	32,91	36,74	40,1	44,1	47,0	55,5
	28	13,6	18,9	22,7	27,3	31,4	34,03	37,92	41,3	45,4	48,3	56,9
	29	14,3	19,8	23,6	28,3	32,5	35,14	39,09	42,6	46,7	49,6	58,3
	30	15,0	20,6	24,5	29,3	33,5	36,25	40,26	43,8	48,0	50,9	59,7
	31	15,7	21,4	25,4	30,3	34,6	37,36	41,42	45,0	49,2	52,2	61,1
	32	16,4	22,3	26,3	31,3	35,7	38,47	42,58	46,2	50,5	53,5	62,5
	33	17,1	23,1	27,2	32,3	36,7	39,57	43,75	47,4	51,7	54,8	63,9
	34	17,8	24,0	28,1	33,3	37,8	40,68	44,90	48,6	53,0	56,1	65,2
	36	19,2	25,6	30,0	35,3	39,9	42,88	47,21	51,0	55,5	58,6	68,0
	38	20,7	27,3	31,8	37,3	42,0	45,08	49,51	53,4	58,0	61,2	70,7
	40	22,2	29,1	33,7	39,3	44,2	47,27	51,81	55,8	60,4	63,7	73,4

Python: from scipy import stats
X2 = stats.chi2.ppf(1-pvalue,dfreedom)

1.1 Méthode de Cochran

Elle est utilisée lorsque des mesures ont été effectuées par des laboratoires ou des personnes différents. Considérons que ces laboratoires ou personnes ont établi, de façon indépendante, chacun une valeur moyenne \bar{x}_k et une estimation de la variance s_k^2 d'un observable. On possède alors n couples de ces estimations. On les classe par ordre croissant de variance et on calcule

$$C = \frac{s_{max}^2}{\sum_{i=1}^n s_i^2}.$$

La variance réduite C suit une loi de probabilité qui est tabulée en fonction du nombre d'observables (Tableau 6). Le couple $\bar{x}_k - s_k^2$ est rejeté si $C > C_{crit}$ donné par cette table. On recommence pour les autres mesures, jusqu'à ce que la valeur de C soit inférieure à C_{crit} .

1.2 Méthode de Grubbs

Elle s'applique aussi bien à des mesures effectuées par des laboratoires ou des personnes différents, qu'à une série de mesures effectuées dans un même laboratoire. Dans le cas de mesures provenant de plusieurs laboratoires, il faut commencer par utiliser la méthode de Cochran qui est basée sur les variances. La méthode de Grubbs porte sur les écarts à la moyenne \bar{x} . On calcule

$$G = \frac{\max(x_i - \bar{x})}{s(X)}.$$

L'écart type réduit G suit une loi de probabilité qui est tabulée en fonction du nombre d'observables. La valeur x_i est rejetée si $G > G_{crit}$ donné par cette table. On recommence pour les autres mesures, jusqu'à ce que la valeur de G soit inférieure à G_{crit} . A chaque itération, la moyenne est calculée avec les valeurs restantes. Les tables utilisées sont regroupées dans le Tableau 6.

Tableau 6 – Valeurs critiques de Cochran et de Grubbs en fonction du nombre d'estimations

Nombre d'observables	Valeurs critiques de Cochran au risque de 5%	Valeurs critiques de Grubbs au risque de 5%
2	0,939	-
3	0,798	1,155
4	0,684	1,481
5	0,598	1,715
6	0,532	1,887
7	0,480	2,020
8	0,438	2,126
9	0,403	2,215
10	0,373	2,290
11	0,348	2,355
12	0,326	2,412
13	0,307	2,462
14	0,291	2,507
15	0,276	2,549
16	0,262	2,585
17	0,250	2,620
18	0,240	2,651
19	0,230	2,709
20	0,220	2,709

Application 8 (les expériences ont été réalisées par des doctorants et un stagiaire au Laboratoire d'Energétique, de Mécanique et d'Electromagnétisme de l'Université Paris Nanterre, à Ville d'Avray) :

L'objectif de cette application est d'estimer l'incertitude de mesure de la pression atteinte en fin de déflagration dans une chambre cylindrique. La mesure est réalisée avec un capteur KISTLER 6061B refroidi par un circuit d'eau.

Deux compositions cibles à deux niveaux de pression initiale différents ont été expérimentées dans cette chambre de déflagration. La composition cible 1 est constituée du mélange de gaz dans les fractions molaires

$X_{N_2}=0,203$, $X_{H_2}=0,398$, $X_{O_2}=0,200$, $X_{CO_2}=0,190$, plus quelques impuretés, avec une pression initiale de 1,013 bar.

La composition cible 2 est constituée du mélange de gaz

$X_{N_2}=0,107$, $X_{H_2}=0,525$, $X_{O_2}=0,263$, $X_{CO_2}=0,105$ avec une pression initiale de 1,913 bar.

Ces deux compositions et pressions initiales permettent de faire varier la composition et la pression finales après déflagration complète. Trois expérimentateurs notés L, V et R, ont réalisé chacun trois expériences de déflagration par mélange, de façon indépendante. Après chaque mesure, le dispositif de mesure a été démonté, puis remonté. Les résultats concernant les compositions cibles 1 et 2, fournis par les expérimentateurs, sont présentés dans le tableau suivant.

Composition	Tir	$P_{initiale}$ mesurée (bar)	P_{finale} mesurée (bar)
1	L1	1,014	7,762
	L3	1,015	7,335
	R3	1,006	7,500
	V1	1,007	7,700
	V2	1,019	7.760
2	L2	1,908	16,46
	L4	1,919	17,04
	V3	1,920	16,46
	R1	1,913	16,10
	R2	1,915	17,50

Des variabilités de composition ont été constatées dans les mélanges réalisés avant déflagration. Les déflagrations sont suffisamment rapides pour considérer que l'état de déflagration final est atteint sans échange de chaleur avec l'extérieur (transformation thermodynamique adiabatique) : c'est une hypothèse. Recenser les sources d'incertitudes et proposer une technique permettant d'accéder à l'incertitude sur la pression finale mesurée pour chaque niveau de pression, à partir des informations disponibles. Les quantifier. Que peut-on conclure sur les données mesurées ? Comment peut-on estimer le nombre de moles final de gaz ? Quelle sont les axes d'amélioration possibles ?

D'après les informations disponibles dans l'énoncé de cette application, les sources d'incertitude identifiées sont les suivantes :

- *la variabilité des mélanges de gaz initiaux pour chaque niveau de pression ;*
- *l'incertitude sur la mesure de la pression initiale ;*
- *l'hypothèse d'adiabaticité de la propagation de la déflagration ;*
- *la précision du capteur Kistler ;*
- *le calibre du voltmètre utilisé pour mesurer la tension fournie par le capteur Kistler ;*
- *la température du capteur refroidi.*

La « data sheet » du capteur Kistler 6061 B est reproduite ci-dessous. C'est un exemple typique de documentation constructeur, mise à disposition des utilisateurs sur son site web.

Pressure – PAE

KISTLER

ThermoCOMP®-Quarz-Drucksensor
Capteur de pression à quartz ThermoCOMP®
ThermoCOMP® Quartz Pressure Sensor

1 ... 2

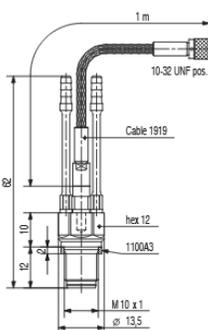
6061B

Capteur de pression cylindre miniature à précision refroidi à l'eau, convenant particulièrement pour mesures dans des petits moteurs à combustion interne et pour investigations thermodynamiques au laboratoire.

Montage avec ou sans refroidissement par eau dans un alésage M10x1. Sensibilité et fréquence propre élevées et excellente stabilité du zéro grâce au refroidissement par eau intégré.

Le montage dans un alésage $\varnothing 14$ mm est rendu possible à l'aide d'une clé spéciale.

- Kleinster wassergekühlter Zylinderdrucksensor
Le plus petit capteur de la pression cylindre refroidi à l'eau
Smallest water-cooled cylinder pressure sensor
- Thermoschock-optimierte Doppel-Membrane
Diaphragme double optimisé contre chocs thermiques
Thermo-shock optimized double diaphragm
- Lange Lebensdauer dank TiN-Beschichtung und Metallkabel
Durée de vie prolongée grâce au revêtement TiN et câble en métal
Long life thanks to TiN coating and metal cable



1 : 1

Bereich Kalibrierte Teilbereiche	Gamme Gammes partielles étalonnées	Range Calibrated partial ranges	bar	0 ... 250
Überlast	Surcharge	Overload	bar	0 ... 250
Empfindlichkeit	Sensibilité	Sensitivity	pC/bar	=-25
Eigenfrequenz	Fréquence propre	Natural frequency	KHz	=90
Linearität, alle Bereiche	Linéarité, toutes les gammes	Linearity, all ranges	% FSO	±±0,5
Beschleunigungsempfindlichkeit axial (mit Kühlung) radial (mit Kühlung)	Sensibilité aux accélérations axiale (avec refroidissement) radiale (avec refroidissement)	Acceleration sensitivity axial (with cooling) radial (with cooling)	bar/g	<0,01
Betriebstemperaturbereich Kühlwasserfluss	Gamme de température d'utilisation Flux d'eau de refroidissement	Operating temperature range Cooling water flow	°C	-50 ... 350
Empfindlichkeitsänderung 50 ±35 °C 50 ... 350 °C	Décalage de la sensibilité 50 ±35 °C 50 ... 350 °C	Sensitivity shift 50 ±35 °C 50 ... 350 °C	%	±±0,5
Thermoschock bei 1500 min ⁻¹ , 9 bar p _{mi} Δp Δp _{mi}	Choc thermique à 1500 min ⁻¹ , 9 bar p _{mi} Δp Δp _{mi}	Thermo shock at 1500 min ⁻¹ , 9 bar IMEP Δp ΔIMEP	bar	< ±0,2
Isolationswiderstand bei 20 °C	Résistance d'isolement à 20 °C	Insulation resistance at 20 °C	TΩ	≥10
Stossfestigkeit	Résistance au choc	Shock resistance	g	2000
Anzugsmoment	Couple de serrage	Tightening torque	Nm	10
Kühlwasserdruck	Pression d'eau de refroidissement	Cooling water pressure	bar	±6
Kapazität, mit Kabel	Capacité, avec câble	Capacitance, with cable	pF	110
Gewicht	Poids	Weight	g	18
Stecker, Keramik-Isolator	Connecteur, isolateur céramique	Plug, ceramic insulator	Type	M4 x 0,35

1 bar = 10⁵ Pa = 10⁵ N · m⁻² = 1,0197... at = 14,503... psi; 1 psi = 0,06894... bar; 1 g = 9,80665 m · s⁻²; 1 Nm = 0,73756... lbf·ft; 1 g = 0,03527... oz

*In all Kistler documents, the decimal sign is a comma on the line (ISO 31-0:1992).