# *Semaine 8* : Concours blanc type Ecricome

*Durée : 4h*

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

---

## *Exercice 1 (23 pts)*

On dit qu'une matrice $A$ carrée d'ordre $n$ est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel $k$ non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0 \text{ et } A^k = 0$$

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$, on dit que le couple $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de $A$ lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est une matrice semblable à une matrice diagonale} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

1. (*3,5 points*) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de $A$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère les matrices colonnes :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (*1,5 point*) Calculer les produits $\Delta X_1$, $\Delta X_2$ et $\Delta X_3$

   (b) (*2 points*) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'on a : $\Delta P = PD$.

   (c) (*2 points*) Calculer $P^{-1}$.

3. (a) (*1 point*) Établir que $N$ est une matrice nilpotente.

   (b) (*2 points*) Vérifier que $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de la matrice $A$.

   (c) (*4 points*) En utilisant la formule du binôme de Newton que l'on justifiera, donner l'expression de $A^n$ en fonction des puissances de $\Delta$. de $N$ et de $n$.

   (d) (*2 points*) Établir que pour tout entier naturel $k \geq 1$, on a $\Delta^k N = N$.

   (e) (*6 points*) Proposer une décomposition de Dunford de $A^n$.

## *Exercice 2 (20 pts)*

Soit $0 < b < a$. On considère les suites imbriquées définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. (*5 points*) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 < v_n < u_n$.
2. (*2 points*) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante et que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
3. (a) (*3,5 points*) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$$

(b) (*5 points*) En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

4. (a) (*1,5 point*) Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est une suite constante.

   (b) (*3 points*) Déterminer la limite commune des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

### ***Exercice 3 (20 pts)***

On considère l'équation :

$$x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$$

On note $u_n$ la solution positive de cette équation.
On note $l = \sqrt{2} - 1$ la limite de $u_n$.

1. (*2 points*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - l = -\frac{u_n^n}{u_n + 1 + \sqrt{2}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) (*2 points*) Montrer que :

$$u_n^n = exp\Big[n \ln l + n \ln \Big(1 + \frac{u_n - l}{l}\Big)\Big]$$

   (b) (*2 points*) Montrer que :

$$n \ln \Big(1 + \frac{u_n - l}{l}\Big) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \frac{u_n - l}{l}$$

   (c) (*7,5 points*) Montrer que :

$$|u_n - l| \leq \frac{(\sqrt{2} - 1)^n}{u_n + 1 + \sqrt{2}} \leq (\sqrt{2} - 1)^n$$

   et en déduire que :

$$\left| n \frac{u_n - l}{l} \right| \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$$

   (d) (*4 points*) Déterminer un équivalent de $u_n^n$.

3. (*2,5 points*) Montrer alors que :

$$u_n - l \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{l^n}{2\sqrt{2}}$$

**_Exercice 4 (20 pts)_**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (*2,5 points*) Calculer $A^2$ et vérifier qu'il existe $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. (*3 points*) Établir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\exists \alpha_n,\ \beta_n \in \mathbb{R}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$ (on écrira $\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}$ en fonction de $\alpha_n$ et $\beta_n$).
3. (a) (*6 points*) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 et déterminer l'expression de $\alpha_n$ en fonction de $n$.

   (b) (*1,5 point*) En déduire l'expression de $\beta_n$.
4. (a) (*2 points*) Prouver que $A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de $A$ et de $I$.

   (b) (*1 point*) Les expressions de $\alpha_n$ et $\beta_n$ sont-elles encore valables pour $n = -1$ ?

   (c) (*4 points*) Déterminer la valeur de $A^n$ pour $n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$.

# Concours blanc type Ecricome : le barème

## *Exercice 1*

1. 1 pour $\Delta$ semblable à une diagonale + 1 pour $N$ nilpotente + 1 pour la commutativité + 0,5 pour la somme
2. (a) 0,5 par produit
   (b) 2 pour le calcul
   (c) 2 pour l'inverse de $P$
3. (a) 1
   (b) 2
   (c) 1 pour la commutativité + 1 pour la formule + 1 pour $N^k = 0$ si $k \geq 2$ + 1 pour la formule finale
   (d) 1 pour $k = 1$ + 1 pour l'hérédité
   (e) 2 pour $A^n = \Delta^n + nN$ + 2 pour les hypothèses + 2 pour vérifier en $n = 0$ et $n = 1$

## *Exercice 2*

1. 1 pour $n = 0$ + 4 pour l'hérédité
2. 1 pour $(u_n)_n$ décroît + 1 pour $(v_n)_n$ croît
3. (a) 0,5 pour l'inégalité de gauche + 3 pour celle de droite
   (b) 1 pour rappeler les monotonies des suites + 4 pour la limite de la différence (dont 1 pour $1/2 \in ]-1;1[$)
4. (a) 1,5
   (b) 1 pour la convergence + 1 pour $l^2 = ab$ + 1 pour dire que $l$ est positive

## *Exercice 3*

1. 2
2. (a) 2
   (b) 1 pour $\dfrac{u_n - l}{l} \to 0$ + 1 pour l'équivalent
   (c) 1,5 pour l'inégalité de droite + 1 pour $u_n \leq l$ + 1 pour $u_n^n \leq l^n$ + 1 pour conclure + 1 pour $\sqrt{2} - 1 < 1$ + 2 pour la limite (dont 1 pour les croissances comparées)

   (d) 2 pour la 1a limite + 1 pour la continuité de l'exponentielle + 1 pour l'équivalent

3. 1,5 pour l'équivalent de $u_n+1+\sqrt{2}$ + 1 pour l'équivalent de $u_n-l$

## *Exercice 4*

1. 1 pour $A^2$ + 1,5 pour la décomposition
2. 1 pour $n=0$ + 2 pour l'hérédité
3. (a) 1 pour la relation + 1 pour l'équation caractéristique + 2 pour la forme générale + 2 pour trouver $A$ et $B$
   (b) 1 pour la formule pour $n \geq 1$ + 0,5 pour vérifier qu'elle est vraie pour $n=0$
4. (a) 2
   (b) 1
   (c) 4

# Concours blanc type Ecricome : le corrigé

## *Exercice 1*

1. On a les propriétés :
   $\star$ $\Delta$ est une matrice diagonale et donc semblable à une matrice diagonale ($\Delta = I\Delta I^{-1}$).
   $\star$ $N \neq 0$ et $N^2 = 0$ donc $N$ est nilpotente (d'indice 2).
   $\star$ On vérifie facilement que $\Delta N = N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\star$ On a $N + \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$.
   Ainsi, on peut conclure que $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de $A$.
2. (a) Facilement, on trouve $\Delta X_1 = 2X_1$, $\Delta X_2 = X_2$ et $\Delta X_3 = X_3$.
   (b) Avec le calcul précédent, on trouve que :
   $$\Delta P = PD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   (c) On calcule $P^{-1}$ par résolution du système associé $PX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. On a :
   $$PX = Y \iff \begin{cases} x + z = u \\ -x - 2z = v \\ y = w \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2u + v \\ y = w \\ z = -u - 2v \end{cases}$$
   On en déduit que $P$ est inversible et :
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. (a) Par simples calculs, on a $N^2 = 0$ et donc $N$ est nilpotente (d'ordre 2).
   (b) On a les propriétés :
   $\star$ $\Delta$ est semblable à une matrice diagonale grâce à 2.b) ($\Delta = PDP^{-1}$).

$\star$ $N$ est nilpotente.
$\star$ $\Delta N = N\Delta$.
$\star$ $A = \Delta + N$.
Ainsi, $(\Delta, N)$ est une décomposition de Dunford de la matrice $A$.

(c) Comme $\Delta$ et $N$ commutent, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$$

car $N^k = 0$ si $k \geq 2$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$$

(d) On montre par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
La formule est vraie pour $k = 1$ : $\Delta N = N$ (par calcul).
On suppose la formule vraie pour un $k \geq 1$ fixé ($\Delta^k N = N$).
Alors, on a $\Delta^{k+1} N = \Delta(\Delta^k N) = \Delta N = N$.
D'où l'ordre $n + 1$.

(e) D'après la question précédente, on a pour $n \geq 2$, $\Delta^{n-1} N = N = N\Delta^{n-1}$.
De plus, d'après 3.c., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}$.
Il s'ensuit que : pour tout $n \geq 2$, $A^n = \Delta^n + nN$.
Notons que :
$\star$ $\Delta^n$ est semblable à une matrice diagonale (car $\Delta$ l'est et $\Delta^n = PD^nP^{-1}$).
$\star$ $N$ est nilpotente car $(nN)^2 = n^2N^2 = 0$.
$\star$ $\Delta^n$ et $N$ commutent car $\Delta$ et $N$ commutent.
En résumé, on peut conclure que $(\Delta^n, nN)$ est une décomposition de Dunford de $A^n$ pour $n \geq 2$.
Il est clair que c'est aussi une décomposition de Dunford pour $A^n$ pour $n = 0$ et $n = 1$.

## ***Exercice 2***

1. Montrons-le par récurrence sur $n \geq 0$.
   Pour $n = 0$, on a bien $0 < v_0 = b < a = u_0$.