Thème 11

Nombres transcendants

Thèmes abordés : Polynôme, suite, série.
Difficulté : ■■■□□

Ce sujet montre de 3 façons différentes l'existence de nombres transcendants sur $\mathbf{Q}$.

Sa résolution ne nécessite que des connaissances rudimentaires sur les polynômes. Seules les questions 10, 11 et 12 nécessitent des connaissances rudimentaires sur les séries et la résolution de ces questions n'est pas nécessaire pour la suite du sujet.

Les parties de ce problèmes sont largement indépendantes.

11.1 Définitions

Définition. *Nombre transcendant.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

*On dit que α est **transcendant** (sur $\mathbf{Q}$) s'il n'existe pas de polynôme non nul à coefficients entiers relatifs P tel que $P(\alpha) = 0$.*

Définitions. *Nombre algébrique, nombre algébrique de degré d.*

Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{N}^*$.

- *On dit que α est un **nombre algébrique** (sur $\mathbf{Q}$) s'il n'est pas transcendant.*
  On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.
- *On dit que α est un **nombre algébrique de degré d**, s'il existe $P \in \mathbf{Z}[X]$ de degré d tel que $P(\alpha) = 0$ et si pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}_{d-1}[X] \setminus \{0\}$, $Q(\alpha) \neq 0$.*
  Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathscr{A}_d$ l'ensemble des nombres algébriques de degré d.

11.2 Existence de nombres transcendants

11.2.1 Par un argument de cardinalité

1. (a) Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique.
   (b) Donner son degré.
2. Montrer que $\mathscr{A} = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathscr{A}_d$.

3. Montrer que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{A}_d$ est au plus dénombrable.
   Indication : On utilisera le fait que $\mathbf{Z}^{d+1}$ est dénombrable pour tout $d \in \mathbf{N}$ et qu'un polynôme de degré d a plus d racines.
4. En déduire que $\mathscr{A}$ est dénombrable, puis conclure.
   Indication : On admet qu'une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

11.2.2 Les nombres de Liouville

On commence par établir l'inégalité de Liouville.

Lemme. *Inégalité de Liouville.*
Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $\alpha \in \mathscr{A}_d$. Il existe $c > 0$ tel que

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \ \left(p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{Z}^*\right), \quad \left(\alpha \neq \frac{p}{q}\right) \Longrightarrow \left(\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d}\right).$$

Nous commençons par établir l'inégalité de Liouville. Soit $\alpha \in \mathscr{A}_d$ avec d un entier supérieur ou égal à 2 et soit P un polynôme de degré d tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

5. Montrer que α est irrationnel.
6. (a) Montrer que $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.
   (b) Montrer que $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}$.
7. Montrer que si $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1$, alors $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d}$.
8. On suppose $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$.
   (b) En déduire que $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{1}{Mq^d}$.
9. Terminer la preuve de l'inégalité de Liouville.

Théorème. *Nombres de Liouville.*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ qui ne stationne pas sur 0.
Alors, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$ converge et sa somme est un nombre transcendant.

Nous prouvons le théorème.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ qui ne stationne pas sur 0.

10. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$ converge.

    On pose $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$.

11. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $q_n = 10^{n!}$.

    Montrer qu'il existe un entier p_n tel que $\sum\limits_{r=1}^{n} \frac{a_r}{10^{r!}} = \frac{p_n}{q_n}$.

12. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $10^{n!} \geq 10^n$.

    (b) En déduire que
    $$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^n}.$$

13. En déduire que α est transcendant.

11.2.3 Un nombre transcendant bien connu

Proposition. e *est un nombre transcendant.*

Nous prouvons la proposition. On suppose qu'il existe un polynôme R non nul à coefficients dans $\mathbf{Z}$ tel que $R(\mathrm{e}) = 0$. On écrit $R = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \in \mathbf{N}$.

14. Montrer que l'on peut supposer $a_0 \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

On note $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers et soit $p \in \mathbf{P}$. Soient les polynômes

$$P = \frac{X^{p-1}(X-1)^p (X-2)^p \cdots (X-n)^p}{(p-1)!} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{np+p-1} P^{(k)}.$$

15. Montrer que la dérivée de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} Q(x)$ est $x \longmapsto -\mathrm{e}^{-x} P(x)$.

16. En déduire que
$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad a_i \int_0^i \mathrm{e}^{-x} P(x)\,\mathrm{d}x = a_i \left(Q(0) - \mathrm{e}^{-i} Q(i)\right).$$

17. En déduire que
$$\sum_{i=0}^{n} a_i \,\mathrm{e}^i \int_0^i \mathrm{e}^{-x} P(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{np+p-1} a_i P^{(k)}(i).$$

18. *Calcul de* $P^{(k)}(i)$ *pour* $k \in [\![0, np+p-1]\!]$ *et* $i \in [\![0, n]\!]$.

    (a) Montrer que
    $$P^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, p-2]\!], \\ (-1)^{np}(n!)^p & \text{si } k = p-1, \\ p\mu_k & \text{si } k \in [\![p, np+p-1]\!], \end{cases}$$

    avec $\mu_k \in \mathbf{Z}$.

(b) Montrer que : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$P^{(k)}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0,p-1]\!], \\ p\lambda_{k,i} & \text{si } k \in [\![p,np+p-1]\!], \end{cases}$$

avec $\lambda_{k,i} \in \mathbf{Z}$.

19. En déduire qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,\mathrm{e}^i \int_0^i \mathrm{e}^{-x}\,P(x)\,\mathrm{d}x = mp - a_0\,(-1)^{np}\,(n!)^p\,.$$

20. Montrer que pour tout nombre premier p assez grand, on a

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,\mathrm{e}^i \int_0^i \mathrm{e}^{-x}\,P(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbf{Z}^*.$$

21. Montrer que

$$\forall x \in [0,n]\,, \quad |P(x)| \leq \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

22. En déduire que

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\,\mathrm{e}^i \int_0^i \mathrm{e}^{-x}\,P(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{i=0}^{n} \left|a_i\,\mathrm{e}^i\right| \frac{i n^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

23. Montrer que

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ p\in\mathbf{P}}} \sum_{i=0}^{n} a_i\,\mathrm{e}^i \int_0^i \mathrm{e}^{-x}\,P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

24. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers relatifs convergente. Montrer qu'elle est stationnaire.
25. Terminer la preuve de la transcendance de e.

Correction du Thème 11

1. (a) Soit $P = X^2 - 2 \in \mathbf{Z}[X]$.
   De toute évidence, $P \neq 0$ et $P\left(\sqrt{2}\right) = 0$.
   $\boxed{\text{On a montré que } \sqrt{2} \text{ est algébrique.}}$
   (b) D'après la preuve faite pour la question 1 (a), $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré **inférieur ou égal** à 2.
   Pour conclure que $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré 2, il reste à montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}_1[X]$ non nul, $Q\left(\sqrt{2}\right) \neq 0$.
   Soit $Q = aX + b \in \mathbf{Z}_1[X]$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $Q\left(\sqrt{2}\right) = 0$, soit $a + b\sqrt{2} = 0$.
   Si $a \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = -\dfrac{b}{a} \in \mathbf{Q}$.
   Donc $a = 0$. Il s'ensuit que $b = 0$.
   Ainsi, il n'existe pas de polynôme non nul $Q \in \mathbf{Z}_1[X]$ tel que $Q\left(\sqrt{2}\right) = 0$.
   $\boxed{\text{On a montré } \sqrt{2} \text{ est un nombre algébrique de degré 2.}}$
2. On prouve les deux inclusions.
   $\boxed{\supset}$ L'inclusion $\mathscr{A} \supset \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathscr{A}_d$ est claire.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathscr{A}$. Comme x est algébrique, il existe $P \in \mathbf{Z}[X]$ non nul (donc non constant) tel que $P(x) = 0$.
   Si $d = \deg(P) \in \mathbf{N}^*$, on a $x \in \mathscr{A}_d$.
   $\boxed{\text{On a montré que } \mathscr{A} = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathscr{A}_d.}$
3. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Déjà $\mathbf{Z}^{d+1}$ est dénombrable comme le produit cartésien de $d+1$ ensembles dénombrables.
   De plus, l'application
   $$\varphi : \begin{cases} \mathbf{Z}^{d+1} & \longrightarrow \mathbf{Z}_d[X] \\ (a_0, a_1, \ldots, a_d) & \longmapsto \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k \end{cases}$$
   est clairement bijective, ainsi $\mathbf{Z}_d[X]$ est aussi dénombrable.
   On en déduit $\mathbf{Z}_d[X] \backslash \mathbf{Z}_{d-1}[X] \subset \mathbf{Z}_d[X]$ est aussi dénombrable.
   Par définition de $\mathscr{A}_d$, on a
   $$\mathscr{A}_d = \bigcup_{P \in \mathbf{Z}_d[X] \backslash \mathbf{Z}_{d-1}[X]} P^{-1}(\{0\}).$$
   Or, pour tout $P \in \mathbf{Z}_d[X] \backslash \mathbf{Z}_{d-1}[X]$, $P^{-1}(\{0\})$ est fini (car un polynôme de degré d a au plus d racines).
   $\boxed{\text{On peut conclure que } \mathscr{A}_d \text{ est au plus dénombrable comme réunion dénombrables d'ensembles finis.}}$

4. Comme $\mathscr{A}$ est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, on en déduit que $\mathscr{A}$ est au plus dénombrable.
   Or, $\mathscr{A}$ n'est pas fini car il contient $\sqrt{p}$ pour tout $p \in \mathbf{P}$,

   $$\boxed{\text{on en déduit que } \mathscr{A} \text{ est dénombrable.}}$$

5. Si α est rationnel, on peut écrire $\alpha = \dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$.
   Soit $P = bX - a$, on a $P(\alpha) = 0$, donc α est un nombre algébrique de degré 1.

   $\boxed{\text{Par contraposée, tout nombre algébrique dont le degré est supérieur ou égal à 2, est irrationnel.}}$

6. (a) Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.
   Si $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, il existe $Q \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $d-1$ tel que

   $$P = \left(X - \frac{p}{q}\right) Q.$$

   Comme α est irrationnel, on a $Q\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$ et Q est de degré $d-1$.
   Quitte à multiplier Q par le PPCM du dénominateur de ses coefficients, on peut supposer que $Q \in \mathbf{Z}[X]$.
   Ainsi, il existe un polynôme de degré $d-1$ à coefficients entiers tel que $Q(\alpha) = 0$.
   Cela contredit le fait que α soit un nombre algébrique de degré d.

   $\boxed{\text{On a montré que pour tout } p \in \mathbf{Z}, \text{ pour tout } q \in \mathbf{N}^*, \ P\left(\dfrac{p}{q}\right) \neq 0.}$

   (b) On écrit $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^{d+1}$.
   Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Comme $P\left(\dfrac{p}{q}\right) \neq 0$, on a

   $$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k q^{d-k} \in \mathbf{Z}^*,$$

   ainsi

   $$\left| q^d \left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq 1.$$

   On a donc montré que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, pour tout $q \in \mathbf{N}^*$,

   $$\boxed{\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^d}.}$$

7. Comme $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq 1$ et $\dfrac{1}{q^d} \leq 1$, on en déduit que $\boxed{\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \geq \dfrac{1}{q^d}.}$

8. (a) On pose $M = \sup_{t \in [\alpha-1, \alpha+1]} |P'(t)|$.
Comme $P(\alpha) = 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a
$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|.$$
(b) En utilisant les résultats obtenus aux questions 6 (b) et 8 (a), on en déduit que
$$\boxed{\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{1}{Mq^d}.}$$

9. Soit $c = \min \left\{ 1, \dfrac{1}{M} \right\}$. D'après les inégalités établies aux questions 7 et 8 (b), on a
$$\boxed{\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{c}{q^d}.}$$

10. Par croissance comparée, on a $\dfrac{a_n}{10^{n!}} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), par négligeabilité,
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{10^{n!}} \text{ converge.}}$$

11. On a $q_n \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{a_r}{10^{r!}} = \sum\limits_{r=0}^{n} a_r 10^{n!-r!}$.
Comme pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, $a_r \in \{0, 1\}$ et $10^{n!-r!} \in \mathbf{N}$, on en déduit que
$$\sum_{r=1}^{n} a_r 10^{n!-r!} \in \mathbf{N}.$$
$$\boxed{\text{On pose } p_n = \sum_{r=1}^{n} a_r 10^{n!-r!}, \text{ on a donc } \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r}{10^r}.}$$

12. (a) On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! \geq n$.
On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition $\mathscr{P}_n$: « $n! \geq n$ ».
Il est clair que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.
On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n non nul.
Par hypothèse de récurrence, on a $n! \geq n$, d'où $(n+1)! \geq n(n+1)$. Comme $n \geq 1$, on en déduit $(n+1)! \geq n+1$.
On a montré que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
Par croissance de la fonction $x \longmapsto 10^x$ sur $\mathbf{R}$, on en déduit que
$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad 10^{n!} \geq 10^n.}$$

(b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne stationne pas sur 0, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^{r!}} > 0.$$

D'après la question 12 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{a_r}{10^{r!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}.$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{10^k} = \dfrac{10}{9} < 10$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\boxed{0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{10}{10^{(n+1)!}} \leq \frac{10}{\left(10^{n!}\right)^n 10^{n!}} \leq \frac{1}{q_n^n}}.$$

13. Si α était un nombre algébrique, en notant d son degré, d'après l'*Inégalité de Liouville*, il existerait un réel $c > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, pour tout $q \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^d} \iff q^d \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq c.$$

Or, d'après l'inégalité établie à la question 12 (b), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq q_n^d \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) < \frac{1}{q_n^{n-d}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} q_n^d \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right) = 0.$$

Ceci implique $c = 0$, ce qui contredit le fait que $c > 0$.

$\boxed{\text{On en déduit que } \alpha \text{ est un nombre transcendant.}}$

14. Si $a_0 = 0$, 0 est racine de R. Si l'on note k l'ordre de multiplicité de 0, il existe $\widetilde{R} \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $R = X^k \widetilde{R}$.

Comme $\mathrm{e} \neq 0$, on a $\widetilde{R}(\mathrm{e}) = 0$ et 0 n'est pas racine de $\widetilde{R}$.

$\boxed{\text{Ainsi, quitte à considérer } \widetilde{R} \text{ défini ci-dessus, on peut supposer } a_0 \neq 0.}$

15. On remarque que $\deg(P) = np + p - 1$, donc $P^{(np+p)} = 0$.
On a donc

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x} Q(x)\right)}{\mathrm{d}\,x} = \mathrm{e}^{-x}\left(Q'(x) - Q(x)\right) = -\,\mathrm{e}^{-x} P(x).$$

$\boxed{\text{On a montré que la dérivée de la fonction } x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} Q(x) \text{ est la fonction } x \longmapsto -\,\mathrm{e}^{-x} P(x).}$