Chapitre 1

Polynômes, complexes...

Chapitre 1 (Polynômes, complexes...)

Énoncés

Polynômes

Pour ce premier chapitre, nous nous intéresserons à un vaste panel de concepts distincts. Commençons par les fonctions polynomiales dont on rappelle qu'elles ne sont pas des polynômes. Cette confusion est sans gravité dans le cadre des polynômes à coefficients réels ou complexes (ou plus généralement à coefficients dans un corps infini) mais peut conduire à des contresens en général (par exemple pour les polynômes à coefficients dans un corps fini).

Introduisons ici quelques méthodes de résolution qui vous seront utiles pour les exercices suivants et plus généralement pour vos oraux :

— Pour calculer des produits, il peut être utile de reconnaître une fonction polynomiale évaluée en un point particulier.
  Par exemple, pour calculer $\prod_{k=1}^{n}\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, posons :

$$P : X \mapsto (1-X)(1+...+X^n) = \prod_{k=0}^{n}\left(X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

  On conclut aisément.

— Pour un polynôme de degré n dont on connaît la valeur en $n+1$ points distincts, on a l'expression explicite de P avec l'interpolation de Lagrange.

— Pour un polynôme de degré n dont on connaît $n+1$ dérivées en un point, on a l'expression explicite de P avec la formule de Taylor.

— Pour un polynôme P scindé, on a :

$$P = \prod_{k=1}^{r}(X-x_k)^{\alpha_k} \text{ et } P' = \sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j \prod_{k=1}^{r}(X-x_k)^{\alpha_k}}{X-x_j}$$

  On a alors la forme suivante, à reconnaître :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{r}\frac{\alpha_j}{X-x_j}$$

— Un certain nombre de factorisations doivent être connue.
Citons par exemple $X^2-2X\cos(\theta)+1 = (X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ qu'on rencontre fréquemment.

1.1 — Polytechnique

Un polynôme est dit stable si toutes ses racines ont une partie réelle strictement négative. Montrer que si un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est stable et unitaire, alors tous ses coefficients sont strictement positifs.

La réciproque est-elle vraie ?

1.2 — Polytechnique

Soit $n \geq 1$. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

1.3 — Polytechnique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair et α racine de $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} X^k$.

Pour tout entier naturel p, montrer que α^{2^p} est racine de P.

1.4 — Polytechnique

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) = P'(X)$.

1.5 — Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{C}[X], P \neq X$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

1.6 — Polytechnique

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que P^n divise $P \circ P$. Montrer que X^n divise P.

1.7 — X/ENS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $P \circ P$ divise P^n . Montrer que P est de la forme aX^k.

1.8 — Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est un nombre premier. Montrer que P est constant.

1.9 — ENS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 1$. Soit D le disque fermé de centre 0 et de rayon $R > 0$. Montrer que le maximum de $|P|$ sur D est atteint sur la frontière de D.

1.10 — ENS

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

1.11 — ENS

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $P^{-1}(\{a\}) = Q^{-1}(\{a\})$ et $P^{-1}(\{b\}) = Q^{-1}(\{b\})$. Montrer que $P = Q$.

1.12 — Polytechnique

Soient $a_{i,j}$ pour $0 \leq i, j \leq n$ des complexes et :

$$P : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \to \sum_{0 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x^i y^j$$

On suppose qu'il existe $(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ distincts et $(y_1, ..., y_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ distincts eux aussi, tels que :

$$\forall (k, l) \in [\![1, n+1]\!]^2, P(x_k, y_l) = 0$$

Montrer que $P = 0$.

1.13 — Polytechnique

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n > 2$, $P = (X + 1)(X^2 + 1)...(X^n + 1)$ et $\omega = \exp^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $P(\omega)$.

1.14 — Polytechnique

Calculer $\prod_{\substack{(z,z') \in \mathbb{U}_n^2 \\ z \neq z'}} (z - z')$.

1.15 — Polytechnique

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

1.16 — Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que les coefficients de P sont dans $\mathbb{Q}$.

1.17 — X/ENS

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X) = Q(X) - Q(X-1) \text{ et } Q(0) = 0$$

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^n = Q_n(X) - Q_n(X-1)$ et $Q_n(0) = 0$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $Q_n' = nQ_{n-1} + Q_n'(0)$.

1.18 — Polytechnique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$$

1.19 — Polytechnique

Si P est un polynôme réel scindé, montrer que P' l'est aussi.

1.20 — X/ENS

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$. On suppose que A, B et C ne sont pas constants et n'ont aucun diviseur commun non constant. On suppose $C = A + B$.

Posons N le nombre de racines distinctes de ABC et $d(P)$ le degré du prolynôme P. Montrer :

$$\max(d(A), d(B), d(C)) \leq N - 1$$

Complexes

Pour cette partie, il s'agit en général d'exercices nécessitant au plus une bonne rigueur.

1.21 — Polytechnique

Soient $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ et $z = a + ib$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P unitaire de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$.

2. Montrer que a et b sont entiers si et seulement si les coefficients de P sont entiers.

1.22 — Polytechnique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a > b > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - a| = \sqrt{a^2 - b^2}$. Montrer que :

$$\left|\frac{z-b}{z+b}\right| = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Systèmes

Là aussi, il n'y a que très peu de diversité dans les exercices. N'oubliez pas d'exploiter la relation entre coefficients et racines :

$$(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3) = X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)X - x_1x_2x_3$$

1.23 — Polytechnique

Trouver les racines de $X^2 - 2X + i$.

1.24 — Polytechnique

Trouvez les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ xyz=1 \\ |x|=|y|=|z|=1 \end{array}\right.$$

1.25 — X/ENS

À quelle condition sur le réel a le système :

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=a \end{array}\right.$$

admet-il des solutions réelles ? Lorsque cette condition est remplie, les déterminer.

Ensembles

1.26 — Polytechnique

Soit U l'ensemble des complexes z tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $z^n = 1$. Quels sont les complexes u tels que U soit stable par multiplication par u ?

1.27 — ENS

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}$ est fade si :

$$\nexists\ (x, y, z) \in A^3,\ x+y=z$$

Déterminer le cardinal maximal d'une partie fade de $[\![1, n]\!]$.

1.28 — Polytechnique

Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

Arithmétique

1.29 — X/ENS

Soit $n = 10101010\ldots0101$ avec 2020 zéros. Montrer que n n'est pas premier.

1.30 — X/ENS

Dénombrer le nombre d'entiers naturels de n chiffres sans séquence 13.

1.31 — Polytechnique

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est le nombre de fois que le chiffre 1 apparaît dans la liste des entiers compris entre 0 et n.

1. Déterminer $f(10^k - 1)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer qu'il existe un nombre fini de $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq f(n)$.

1.32 — Polytechnique

Déterminer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de 1 000 000.