CHAPITRE 1

Second degré

Le pré-requis pour ce premier chapitre est le cours de Première sur le second degré. Nous proposons des exercices d'approfondissement conformes au programme et pour aller plus loin, nous donnons des compléments de cours ainsi que des exercices au sujet :

- du discriminant réduit,
- de la somme et le produit des racines,
- de la résolution d'équations ou d'inéquations irrationnelles,
- du second degré et de la géométrie.

1.1 Discriminant réduit

Théorème. *Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.*

On suppose que $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ et soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Si $b = 2b'$ et en posant $\Delta' = b'^2 - ac$, alors l'équation (E) admet deux solutions distinctes x' ou x'' telles que

$$x' = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \text{ ou } x'' = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Démonstration. Avec les données de l'énoncé, nous obtenons

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'.$$

Nous observons que $\Delta > 0$ implique $\Delta' > 0$.

De plus, il vient :

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a},$$
ou
$$x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'+\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Remarque. Le réel Δ' est le discriminant réduit de l'équation (E).

Exemple. Nous résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$. Son discriminant réduit est

$$\Delta' = (-\sqrt{3})^2 - (-3) = 6.$$

Il en résulte que les solutions de cette équation sont

$$x' = \sqrt{3} - \sqrt{6} \text{ ou } x'' = \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

1.2 Somme et produit des racines

Théorème. *Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.*

On suppose que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ et soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Les deux racines x' et x'' de (E), distinctes ou non, satisfont aux deux égalités :

- $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$,
- $x' \times x'' = \dfrac{c}{a}$.

Démonstration. Il s'agit d'une simple vérification, puisque dans les conditions de l'énoncé, nous avons

$$x' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

D'une part, nous en déduisons

$$x' + x" = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Et d'autre part, nous obtenons

$$x' \times x'' = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$
$$x' \times x'' = \frac{c}{a}.$$

Exemple. Cas où une des deux racines est évidente.

Nous considérons l'équation $2x^2 + x - 3 = 0$ qui admet pour solution évidente $x' = 1$.

Puisque le produit des deux solutions de cette équation est égal à $-\dfrac{3}{2}$, l'autre solution est $x'' = -\dfrac{3}{2}$.

Ainsi nous avons résolu cette équation mentalement, sans aucun calcul.

Proposition. *(Réciproque du théorème précédent)*

Soient S et P deux réels tels que $S^2 - 4P \geq 0$. Dans $\mathbb{R}^2$, le système

$$\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases},$$

admet pour solutions les couples (u, v) ou (v, u) où u et v sont les racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Démonstration. Le système proposé équivaut à

$$\begin{cases} v = S - u \\ u(S - u) = P \end{cases}.$$

La seconde équation du système est telle que

$$u(S - u) = P \Leftrightarrow u^2 - Su + P = 0.$$

Puisque $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$, nous en déduisons que u est une solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. Comme u et v jouent des rôles symétriques, v est également une solution de cette dernière.

Nous avons ainsi prouvé que si (u, v) est une solution du système proposé, il en est de même du couple(v, u) tels que u et v soient les deux racines distinctes ou non de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

Réciproquement si u et v sont racines de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, alors d'après le théorème précédent, nous avons

$$\begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}.$$

Exemple. Soit $a \geq 2$ un réel donné. Nous résolvons le système

$$\begin{cases} x + y = a + 1 \\ xy = a \end{cases}.$$

Ce système admet des solutions si et seulement si les réels x et y sont les deux racines, si elles existent, de l'équation $X^2 - (a+1)X + a = 0$.

Nous avons

$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = (a-2)^2 \geq 0.$$

Cette équation a donc pour solution

$$x = \frac{a+1-(a-2)}{2} = \frac{3}{2}$$
ou
$$x = \frac{a+1+(a-2)}{2} = \frac{2a-1}{2}.$$

Nous en concluons que le système proposé admet pour solutions les deux couples $(\frac{3}{2}, \frac{2a-1}{2})$ ou $(\frac{2a-1}{2}, \frac{3}{2})$.

1.3 Équations et inéquations irrationnelles

L'objectif est ici de résoudre des équations de la forme $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ou des inéquations de la forme $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (respectivement $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$). Pour cela, nous donnons les deux propositions suivantes :

Proposition. *Pour tous réels a et b avec $a \geq 0$, nous disposons de l'équivalence suivante :*

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2 \text{ et } b \geq 0.$$

Démonstration. Soient a et b deux réels avec $a \geq 0$.

Si $\sqrt{a} = b$, alors $b \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = b^2$, soit $b \geq 0$ et $a = b^2$.

Réciproquement, supposons que $a = b^2$ et $b \geq 0$. Nous en déduisons que

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2}, \text{ soit } \sqrt{a} = |b|.$$

Puisque $b \geq 0$, nous obtenons que $\sqrt{a} = b$.

Proposition. *Pour tous réels a et b avec $a \geq 0$, nous disposons de l'équivalence suivante :*

$$\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow a \leq b^2 \text{ et } b \geq 0.$$

Démonstration. Soient a et b deux réels avec $a \geq 0$.

Si $\sqrt{a} \leq b$, alors $b \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 \leq b^2$, car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte que $b \geq 0$ et $a \leq b^2$.

Réciproquement, supposons que $a \leq b^2$ et $b \geq 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Nous en déduisons :

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b^2}, \text{ soit } \sqrt{a} \leq |b|.$$

Puisque $b \geq 0$, nous obtenons que $\sqrt{a} \leq b$.

Exemples. Nous résolvons une équation et une inéquation.

• Nous résolvons l'équation irrationnelle $\sqrt{4-x} = x-2$, notée [1]. Nous observons que l'ensemble de définition de cette équation est l'intervalle $]-\infty, 4]$. Pour $x \in]-\infty, 4]$, en appliquant la première proposition ci-dessus, il vient

$$\begin{gathered}
[1] \Leftrightarrow 4-x = (x-2)^2 \,\text{et}\, x-2 \geq 0, \\
[1] \Leftrightarrow 4-x = x^2-4x+4 \,\text{et}\, x \geq 2, \\
[1] \Leftrightarrow x(x-3) = 0 \,\text{et}\, x \geq 2, \\
[1] \Leftrightarrow x = 0 \,\text{ou}\, x = 3 \,\text{et}\, x \geq 2, \\
[1] \Leftrightarrow x = 3.
\end{gathered}$$

Puisque, $3 \in]-\infty, 4]$, nous en concluons que

$$S_{[1]} = \{3\}.$$

• Nous résolvons l'inéquation irrationnelle $\sqrt{x+1} \leq 2x+3$, notée [2]. L'ensemble de définition de cette inéquation est l'intervalle $[-1, +\infty[$. Pour $x \in [-1, +\infty[$, en appliquant la seconde proposition ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{gathered}
[2] \Leftrightarrow x+1 \leq (2x+3)^2 \,\text{et}\, 2x+3 \geq 0, \\
[2] \Leftrightarrow 4x^2+11x+8 \geq 0 \,\text{et}\, x \geq -\frac{3}{2}.
\end{gathered}$$

Calculons le discriminant du trinôme $4x^2+11x+8$. Nous avons

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 4 \times 8 = -7 < 0,$$

ce qui justifie que, pour tout réel $x \geq -\frac{3}{2}$, $4x^2+11x+8 > 0$.

Nous en déduisons que pour $x \geq -\frac{3}{2}$ et $x \geq -1$, c'est-à-dire pour $x \geq -1$, $4x^2+11x+8 > 0$. Pour conclure, nous obtenons

$$S_{[2]} = [-1, +\infty[.$$

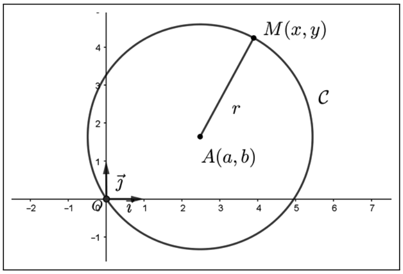
1.4 Équations d'un cercle

Il s'agit dans ce complément d'étudier un type d'équations du second degré à deux inconnues.

Proposition. *Le plan est rapporté à un repère orthonormal* $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*. On donne un point* $A(a\,,b)$ *et* r *un réel strictement positif. Le cercle* $\mathcal{C}$ *de centre* A *et de rayon* r *a pour équation*

$$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2.$$

Démonstration. Soit $M(x,\,y)$ un point du plan.



Par définition d'un cercle, nous avons

$$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow AM=r.$$

Puisque l'égalité $AM=r$ est dans $\mathbb{R}^+$, nous disposons des équivalences suivantes :

$$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow AM^2=r^2,$$
$$M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-a)^2=r^2,$$

ce qui justifie qu'une équation du cercle $\mathcal{C}$ est

$$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2.$$

Exemples. Nous en donnons deux.

- Une équation du cercle trigonométrique, c'est-à-dire de centre O et de rayon 1 est $x^2+y^2=1$.
- Une équation du cercle du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-1,\,0)$ et de rayon $\sqrt{5}$ est $(x+1)^2+y^2=5$.

Remarque. En développant l'équation $(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$, nous obtenons une équation du second degré à deux inconnues de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

En posant $\alpha = -2a$, $\beta = -2b$ et $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$, nous observons une équation du type

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Il est donc naturel d'étudier une réciproque. C'est l'objet de la proposition qui suit.

Proposition. *Soient α, β et γ trois réels donnés.*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on désigne par Γ l'ensemble des points $M(x,\,y)$ tels que $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

***1^er^ cas** : si $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4} > \gamma$, alors*

$$\Gamma \text{ est le cercle de centre } \Omega(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}). \text{ et de rayon } \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma}.$$

***2^e^ cas** : si $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4} = \gamma$, alors*

$$\Gamma = \{\Omega\}.$$

***3^e^ cas** : si $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4} < \gamma$, alors*

$$\Gamma = \emptyset.$$

Démonstration. Soit $M(x,\,y) \in \Gamma$. En utilisant la mise sous la forme canonique d'un trinôme, il vient

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow x^2 + 2(\frac{\alpha}{2})x + (\frac{\alpha}{2})^2 - (\frac{\alpha}{2})^2 + y^2 + 2(\frac{\beta}{2})y + (\frac{\beta}{2})^2 - (\frac{\beta}{2})^2 + \gamma = 0, \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma = 0. \end{aligned}$$

Considérons le point $\Omega(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$.

Nous obtenons

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma.$$

Nous procédons à présent, par une disjonction de trois cas.

1^er^ cas : $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{4} > \gamma$.

Dans ce cas, nous en déduisons :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma}.$$

Ainsi, Γ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma}$.

2ᵉ cas : $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} = \gamma$.
Il vient

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \Omega M^2 = 0 \Leftrightarrow M = \Omega.$$

Il en résulte que $\Gamma = \{\Omega\}$.
3ᵉ cas : $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} < \gamma$.
Dans ce cas, nous observons que $\Omega M^2 < 0$, ce qui justifie que $\Gamma = \emptyset$.

Remarque. En pratique, pour résoudre cette équation du second degré à deux inconnues, nous utilisons la mise sous la forme canonique comme dans le cas général ci-dessus. L'exemple suivant illustre cette remarque.

Exemple. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, nous étudions les ensembles (E) et (F) des points $M(x,\,y)$ tels que $x^2+y^2+2x-y-1=0$ et $x^2+y^2+2x-y+2=0$ respectivement.

- Étude de (E). Nous avons :

$$\begin{aligned} M \in (E) &\Leftrightarrow x^2+2x+1-1+y^2-2(\frac{1}{2})y+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2-1=0,\\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Nous posons $\Omega(-1,\,\frac{1}{2})$ et nous en déduisons

$$M \in (E) \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{9}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{3}{2}.$$

Nous en concluons que (E) est le cercle de centre $\Omega(-1,\,\frac{1}{2})$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$.

- Étude de (F). En reprenant les calculs ci-dessus, nous obtenons

$$M \in (E) \Leftrightarrow \Omega M^2 = -\frac{3}{4} < 0,$$

ce qui prouve que $(F) = \emptyset$.