

Table des matières

1	Second degré	1
1.1	Discriminant réduit	1
1.2	Somme et produit des racines	2
1.3	Équations et inéquations irrationnelles	4
1.4	Équations d'un cercle	6
1.5	Exercices corrigés	9
1.5.1	Exemples de résolution	9
1.5.2	Signe d'un trinôme	16
1.5.3	Somme et produit des racines	19
1.5.4	Le second degré et la géométrie	22
1.5.5	Exemples d'équations et inéquations irrationnelles	29
2	Polynômes	33
2.1	Définition d'un polynôme	33
2.2	Identification d'un polynôme	34
2.3	Une factorisation remarquable	36
2.4	Divisibilité	38
2.5	Exercices corrigés	41
2.5.1	Équations polynomiales	41
2.5.2	Divisibilité	50
3	Fonctions	55
3.1	Egalité de deux fonctions	55
3.2	Multiplication d'un réel par une fonction	56
3.3	Addition de deux fonctions	57
3.4	Multiplication de deux fonctions	58
3.5	Inverse, quotient	59

3.6	Composition de deux fonctions	60
3.7	La fonction valeur absolue	63
3.7.1	Définition - Premières propriétés	63
3.7.2	Représentation graphique de $f : x \mapsto x - a $	65
3.7.3	Equation $ x = r$	66
3.7.4	Inéquations $ x \leq r, x < r, x \geq r, x > r$	70
3.7.5	Action de la valeur absolue sur la multiplication, sur l'inverse et sur le quotient	72
3.7.6	Action de la valeur absolue sur l'addition - Inégalité triangulaire	73
3.8	Exercices corrigés	75
3.8.1	Sens de variations et opérations	75
3.8.2	Exercices sur la composition	78
3.8.3	Exercices sur la valeur absolue	91
3.8.4	Fonctions et inégalités	101
4	Limite d'une fonction	113
4.1	Limite nulle en 0	114
4.2	Limite finie en 0	114
4.3	Limite finie en un point	115
4.4	Opérations sur les limites	118
4.5	Limite à droite, à gauche	120
4.6	Limite finie et inégalités	122
4.7	Limite de la composée de deux fonctions	125
4.8	Exercices corrigés	126
5	Dérivation	137
5.1	Dérivabilité en un point	138
5.2	Tangente en un point d'une courbe	140
5.3	Fonction dérivée	143
5.3.1	Définition d'une fonction dérivée	143
5.3.2	Dérivée de fonctions usuelles	144
5.3.3	Tableau des dérivées de fonctions usuelles	149
5.4	Opérations sur les dérivées	150
5.4.1	Dérivée d'une somme	150
5.4.2	Dérivée d'un produit	151

5.4.3	Dérivée du produit d'un réel par une fonction	152
5.4.4	Dérivée de l'inverse d'une fonction	152
5.4.5	Dérivée du quotient de deux fonctions	154
5.4.6	Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées . . .	156
5.4.7	Dérivée de la composée avec une fonction affine	156
5.5	Approximation affine tangente	159
5.6	Applications de la dérivation	162
5.6.1	Dérivée et variations d'une fonction	162
5.6.2	Dérivée et extremum	167
5.7	Exercices corrigés	171
5.7.1	Dérivabilité en un point	171
5.7.2	Tangente	180
5.7.3	Opérations sur les dérivées : compléments	189
5.7.4	Application affine tangente	194
5.7.5	Applications de la dérivation	199
6	Suites	221
6.1	Généralités sur les suites	222
6.1.1	Les définitions	222
6.1.2	Différentes modalités pour définir une suite	223
6.2	Propriétés qualitatives d'une suite	227
6.2.1	Sens de variation d'une suite	227
6.2.2	Suite majorée, minorée, bornée	231
6.2.3	Suite périodique	232
6.3	Suite arithmétique	233
6.3.1	Définition - Exemples	233
6.3.2	Propriétés d'une suite arithmétique	235
6.3.3	Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique	237
6.4	Suite géométrique	241
6.4.1	Définition - Exemples	241
6.4.2	Propriétés d'une suite géométrique	243
6.4.3	Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique	245
6.5	Suites convergentes	248
6.5.1	Un exemple introductif	248
6.5.2	Définitions d'une suite convergente	249
6.5.3	Unicité - Opérations sur les limites	252

6.5.4	Suites convergentes et inégalités	255
6.6	Suites divergentes vers l'infini	257
6.6.1	Un exemple introductif	257
6.6.2	Les définitions	258
6.6.3	Opérations sur les suites de limite finie ou infinie	259
6.6.4	Limites infinies et inégalités	262
6.7	Limite d'une suite géométrique	263
6.7.1	Limite de q^n	263
6.7.2	Limite de la somme des termes d'une suite géométrique	266
6.8	Exercices corrigés	268
6.8.1	Propriétés qualitatives d'une suite	268
6.8.2	Suites arithmétiques - Suites géométriques	277
6.8.3	Limite d'une suite	292
7	La fonction exponentielle	321
7.1	Définition de la fonction exponentielle	322
7.1.1	Existence et unicité	322
7.1.2	La définition - Les premières propriétés	324
7.2	Propriétés algébriques	325
7.2.1	Action sur l'addition des réels	325
7.2.2	Action sur l'opposé, sur la soustraction	326
7.2.3	Action sur le produit nx avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$	328
7.2.4	Composée de la fonction racine carrée avec exp	329
7.3	La notation exponentielle	330
7.3.1	Le nombre e	330
7.3.2	La fonction $x \mapsto e^x$	330
7.3.3	Variation de exp	332
7.4	Dérivation et fonction exponentielle	334
7.4.1	Dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$	334
7.4.2	Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$	335
7.5	Exercices corrigés	337
8	Trigonométrie	363
8.1	Le radian	364
8.1.1	Longueur d'un arc de cercle	364
8.1.2	Le radian : une unité d'angle	365

8.2	Repérage sur le cercle trigonométrique	367
8.2.1	Le cercle trigonométrique	367
8.2.2	Repérage sur ce cercle	368
8.2.3	Repérage dans le premier quadrant	369
8.3	Angle orienté	371
8.3.1	Angle orienté de deux vecteurs unitaires	371
8.3.2	Angle orienté de deux vecteurs non nuls	374
8.3.3	Propriétés de calcul avec les angles orientés	374
8.3.4	Orientation du plan	377
8.3.5	Angle orienté et vecteurs colinéaires	379
8.4	Cosinus et sinus d'un nombre réel	383
8.4.1	Les définitions du cosinus et du sinus	383
8.4.2	Premières formules de trigonométrie	384
8.4.3	Cosinus et sinus d'un angle orienté	389
8.4.4	Cosinus et sinus de réels associés à x	390
8.4.5	Lien avec la trigonométrie dans un triangle rectangle . .	392
8.5	Fonction tangente	393
8.6	Équations trigonométriques	396
8.6.1	Équation de la forme $\cos x = a$, où a est un réel donné .	396
8.6.2	Équation de la forme $\sin x = a$, où a est un réel donné .	399
8.6.3	Équation de la forme $\tan x = a$, où a est un réel donné .	402
8.7	Exercices corrigés	406
8.7.1	Quelques exercices généraux	406
8.7.2	Angles orientés	415
8.7.3	Équations - Inéquations trigonométriques	421
9	Produit scalaire	431
9.1	Définition du produit scalaire	432
9.1.1	Introduction	432
9.1.2	Les définitions	433
9.1.3	Expression analytique du produit scalaire	434
9.1.4	Vecteurs orthogonaux	435
9.2	Propriétés du produit scalaire	437
9.2.1	Règles de calculs	437
9.2.2	Identités remarquables et produit scalaire	439
9.2.3	Produit scalaire et vecteurs colinéaires	439

9.3	Produit scalaire et projeté orthogonal	441
9.3.1	Projeté orthogonal sur une droite	441
9.3.2	Projeté orthogonal d'un vecteur	444
9.4	Produit scalaire et angle	447
9.5	Applications du produit scalaire	448
9.5.1	Vecteur normal à une droite	448
9.5.2	Réduction de $MA^2 + MB^2$	452
9.5.3	Produit scalaire et cercle	454
9.5.4	Réduction de $MA^2 - MB^2$	457
9.5.5	Formules d'Al-Kashi	459
9.5.6	Distance d'un point à une droite	461
9.6	Exercices corrigés	463
10	Fonctions trigonométriques	497
10.1	Propriétés qualitatives	497
10.1.1	Parité	497
10.1.2	Sens de variations	499
10.1.3	Représentations graphiques	500
10.1.4	Fonctions périodiques	500
10.2	Les formules d'addition - De duplication	502
10.2.1	Formule d'addition	502
10.2.2	Formules de duplication	505
10.3	Dérivation des fonctions trigonométriques	506
10.3.1	Dérivées en 0 de sin et cos	506
10.3.2	Dérivées de sin et cos	508
10.3.3	Dérivée de la fonction tangente	510
10.3.4	Dérivée de la composée avec une fonction affine	511
10.4	Exercices corrigés	512
10.4.1	Fonctions périodiques	512
10.4.2	Calculs trigonométriques	515
10.4.3	Calculs de limites	531
10.4.4	Applications de la dérivation de sin et cos	535
11	Probabilités	553
11.1	Probabilités conditionnelles	554
11.1.1	Un exemple introductif	554

11.1.2	Définition d'une probabilité conditionnelle	555
11.1.3	Propriétés	556
11.2	Probabilités totales	558
11.2.1	Un exemple introductif	558
11.2.2	Probabilités totales pour une partition $\{B, \overline{B}\}$	560
11.2.3	Probabilités totales : cas général	562
11.2.4	Indépendance	564
11.3	Variables aléatoires finies	567
11.3.1	Un exemple introductif	567
11.3.2	Les définitions	569
11.3.3	Loi d'une variable aléatoire	571
11.3.4	Trois variables aléatoires finies de référence	571
11.3.5	Espérance d'une variable aléatoire	572
11.3.6	Variance d'une variable aléatoire	575
11.4	Exercices corrigés	580
11.4.1	Probabilités conditionnelles - Indépendance	580
11.4.2	Variables aléatoires	603
11.4.3	Fonctions indicatrices	622

12 Annexe : Ensembles - Logique 627

12.1	Notions sur les ensembles	628
12.1.1	Des exemples rencontrés en Seconde	628
12.1.2	Plus généralement	629
12.1.3	Relation d'appartenance - Relation d'inclusion	629
12.1.4	Egalité ensembliste	630
12.2	Opérations ensemblistes	632
12.2.1	Intersection	632
12.2.2	Union	633
12.2.3	Distributivité	634
12.2.4	Complémentaire	634
12.3	Proposition - Connecteurs logiques	635
12.3.1	Proposition	635
12.3.2	Négation	635
12.3.3	Le connecteur "et"	636
12.3.4	Le connecteur "ou"	636
12.3.5	Le connecteur "implication"	637

12.3.6	Réciproque	639
12.3.7	Equivalence	640
12.3.8	Négation des connecteurs <i>non</i> , \wedge , \vee , \Rightarrow	642
12.4	Quantificateurs	643
12.4.1	Quantificateur universel	643
12.4.2	Quantificateur existentiel	644
12.4.3	Négation et quantificateurs	645
12.5	Quelques méthodes usuelles de démonstration	646
12.5.1	Raisonnement par l'absurde	646
12.5.2	Raisonnement par contraposition	647
12.5.3	Preuve par un contre-exemple	648
12.5.4	Raisonnement par disjonction	648
12.5.5	Raisonnement par récurrence	649