Calcul différentiel 13

Pour une fonction numérique f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\operatorname{grad}(f)$ le gradient de f.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2$ (norme euclidienne usuelle).
Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, préciser le gradient de f en x.

Exercice 2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Déterminer φ pour que f vérifie

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}.$$

D'après Mines-Télécom

Exercice 3

Soit $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\right\}$.
Soit A et B des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ à valeurs réelles. On pose

$$\varphi : (x, y) \mapsto -\sqrt{y^2 - x^2} + A(x + y) + B(y - x).$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et calculer $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y)$.

Exercice 4

Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes

1) $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^3 + y^3$
2) $g : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + x^4 + y^4$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Soit $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ et $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1\}$.
On pose

$$f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy.$$

1) Calculer le gradient de f et préciser les points critiques de f appartenant à O.
2) Justifier l'existence de $m = \min\limits_T f$ et $M = \max\limits_T f$.
3) Déterminer les valeurs de m et M.

Exercice 6 *Changement linéaire*

1) Soit $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$f : (x, y) \mapsto g(x + y, x - y).$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de g.

2) Réciproquement, soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose

$$g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right).$$

Vérifier que g est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\frac{\partial g}{\partial u}$ en fonction des dérivées partielles de f.

3) Déterminer les fonctions numériques f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

D'après CCINP

Exercice 7 *Utilisation des coordonnées polaires*

Soit $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et $V =]0,+\infty[\times]0,\pi/2[$.

1) Vérifier que si $(r,\theta) \in V$ alors $\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in U$.

2) Réciproquement, vérifier que si $(x,y) \in U$ alors $\big(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\big) \in V$.

3) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (r,\theta) \in V, \quad g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   a) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et exprimer $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}$.

   b) Réciproquement si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

4) En déduire les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercice 8 ⋆ *Classique*

Soit $U = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\big\}$ et f définie sur U par

$$f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

1) a) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

   b) Montrer que pour tout $(x,y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.

   c) Préciser en tout point (x,y) de U, $(\mathrm{grad}(f))(x,y)$.

2) Soit $U_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\big\}$.

   a) Soit $(x,y) \in U_1$.
   Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$, $(tx,ty) \in U_1$.

   b) En déduire que f est constante sur U_1 et préciser sa valeur.
   Indication : on pourra introduire $t \mapsto f(tx,ty)$.

3) Soit $U_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1 \text{ et } x > 0\big\}$. On admettra que U_2 est un ouvert convexe.

   a) Déterminer $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y)$.

   b) En déduire que f est constante sur U_2 et préciser sa valeur.

4) Que dire de f sur $U_3 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1 \text{ et } x < 0\big\}$?

D'après CCINP

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, on sait que $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on a pour $x \neq 0$:

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{2x_i}{2\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$.

Donc $\big(\mathrm{grad}(f)\big)(x) = \frac{1}{\|x\|}x$ (c'est le vecteur unitaire colinéaire à x et de même sens).

Exercice 2

On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 puis deux :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\
&= -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= +2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

dérivée d'une composée

dérivée d'un produit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right)\\
&= \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1}{x^2}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

dérivée cette fois par rapport à y

En multipliant par x^2 (qui est non nul) on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3} \iff \left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$$

Lorsque (x,y) décrit $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, le réel $t = y/x$ décrit $\mathbb{R}$. Donc cela revient à étudier l'équation différentielle en t : $(t^2+1)\varphi''(t) + 2t\varphi'(t) = t$.
On peut l'étudier de façon classique (via l'équation homogène $y' = -\frac{2t}{1+t^2}y$) mais il est plus rapide de reconnaître la dérivée de $t \mapsto (t^2+1)\varphi'(t)$. Donc

φ convient si, et seulement si, il existe C tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t^2+1)\varphi'(t) = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

On intègre ensuite $\varphi'(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{t^2+1} + C\frac{1}{t^2+1} = \frac{1}{2} + \left(C - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{t^2+1}$.
Finalement (en notant $\alpha = C - \frac{1}{2}$) :

φ est solution si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}t + \alpha\arctan(t) + \beta.$$

Exercice 3

Sur l'ouvert U, $y^2 - x^2 > 0$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Comme composée et somme, la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto -\sqrt{y^2 - x^2} + A(x + y) + B(y - x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
Pour $(x, y) \in U$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{y^2-x^2} + A(x+y) + B(y-x)\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} + A'(x+y) - B'(y-x) \\
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{x^2}{(y^2-x^2)^{3/2}} + A''(x+y) + B''(y-x) \\
&= \frac{y^2-x^2+x^2}{(y^2-x^2)^{3/2}} + A''(x+y) + B''(y-x) \\
&= \frac{y^2}{(y^2-x^2)^{3/2}} + A''(x+y) + B''(y-x)
\end{aligned}$$

dérivée d'une composée

dérivée d'un produit

$t^{3/2} = t\sqrt{t}$

De même $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}} + A'(x+y) + B'(y-x)$. Puis :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2}{(y^2-x^2)^{3/2}} + A''(x+y) + B''(y-x)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(y^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Exercice 4

Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert). On sait que les extrema locaux sont parmi les points critiques.

1) On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3y^2 \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{grad}(f)\big)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2(x-y) + 3x^2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

Le seul point critique de f est $(0, 0)$.
Or $f(0, 0) = 0$ et $f(x, x) = 2x^3$ change de signe au voisinage de 0 donc f n'admet pas d'extremum local.

2) On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 4y^3.$$

Donc avec le même type de calculs :

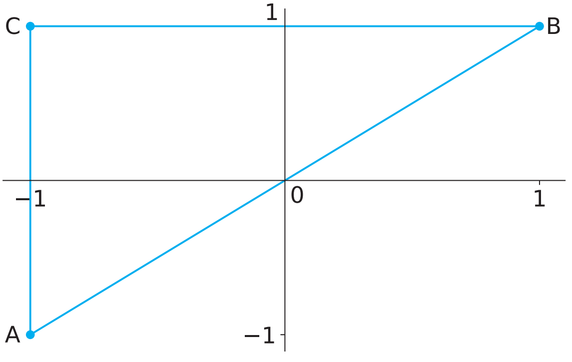
$$\big(\mathrm{grad}(g)\big)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4x^3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Puis $(x + x^3 = 0 \iff x = 0)$ entraîne que g a un unique point critique qui est $(0, 0)$.
Or $g(0, 0) = 0$ et il est clair que pour tout (x, y), $g(x, y) \geqslant 0$.
Le point $(0, 0)$ est le seul extremum local de g (de plus c'est un minimum global).

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

La partie T est délimitée par les trois conditions $-1 \leqslant x, x \leqslant y$ et $y \leqslant 1$. C'est la partie du plan délimité par le triangle de sommets $A(-1, -1), B(1, 1)$ et $C(-1, 1)$:



1) On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -3(y - x)^2 + 6y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3(y - x)^2 + 6x$.
Si le gradient est nul alors $y = -x$ puis en reportant $12x^2 + 6x = 0$.
Ce qui donne $x = 0$ (et alors $y = 0$) ou $x = -1/2$ (et alors $y = 1/2$).
Le point $(0, 0)$ n'appartient pas à l'ouvert.
Sur l'ouvert O, f admet un seul point critique $(-1/2, 1/2)$.

2) La partie T est bornée car incluse dans $[-1, 1]^2$.
D'autre part, T est l'intersection de trois demi-plans fermés donc c'est un fermé.
La fonction f est continue sur T qui est fermée et bornée donc f est bornée sur T et atteint ses bornes. D'où l'existence d'un minimum m et d'un maximum M.

3) Les extrema peuvent être atteints en un point de l'ouvert O ou de l'un des trois côtés du triangle.
Si un extremum est atteint en un point de O, ce point sera nécessairement parmi les points critiques car f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert O. On a vu que le seul candidat est le point $(-1/2, 1/2)$. Le calcul donne $f(-1/2, 1/2) = -1/2$.

Étude sur le premier côté $x \in [-1, 1]$ et $y = x$.
On considère $g : x \mapsto f(x, x) = 6x^2$ sur $[-1, 1]$. Son minimum est 0 et son maximum 6.

Étude sur le second côté : $x \in [-1,1]$ *et* $y = 1$.
On étudie $h : x \mapsto f(x,1) = (1-x)^3 + 6x$ sur $[-1,1]$.

$$h'(x) = 3(2-(1-x)^2) = 3(\sqrt{2}-1+x)(\sqrt{2}+1-x).$$

$1+\sqrt{2} \notin [-1,1]$, h' change de signe en $\alpha = 1-\sqrt{2} \in [-1,1]$.
h est décroissante sur $[-1,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha,1]$.
Le calcul donne $h(-1) = 2$, $h(\alpha) = 6-4\sqrt{2}$ et $h(1) = 6$.
On en déduit $\min\limits_{[-1,1]} h = 2(3-2\sqrt{2}) > 0$ et $\max\limits_{[-1,1]} h = 6$.

Étude sur le dernier côté : $x = -1$ *et* $y \in [1,1]$.
On considère $\varphi : y \mapsto (y+1)^3 - 6y$ sur $[-1,1]$. L'étude ne serait pas difficile mais il est plus rapide de remarquer que $\varphi(y) = h(-y)$ donc on trouvera le même minimum positif et le même maximum valant 6.
Bilan : Le minimum de f sur T vaut $-1/2$ et le maximum vaut 6.

Exercice 6

Dans tout l'exercice on utilise :

$$\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{u+v}{2} \\ y &= \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

1) Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et d'après la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial u}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v}$$

Donc : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

2) De même g est de $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}.$$

3) Les questions précédentes montrent que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f \Leftrightarrow 2\frac{\partial g}{\partial u} = g.$$

Pour v fixé, l'équation $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{1}{2}g$ est une équation différentielle du linéaire du premier ordre $y' = \frac{1}{2}y$. On sait que les solutions sont de la forme $u \mapsto C\mathrm{e}^{u/2}$ où C est une constante (par rapport à u mais qui dépend de v).
Donc g est solution si, et seulement si, il existe donc une fonction $\lambda : v \mapsto \lambda(v)$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(u,v) = \lambda(v)\mathrm{e}^{u/2}.$$

Donc f est solution si, et seulement si, il existe une fonction $\lambda : v \mapsto \lambda(v)$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \lambda\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{e}^{(x+y)/2}.$$

CORRECTIONS

Exercice 7 *Utilisation des coordonnées polaires*

Dans tout l'exercice, on utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$.

1) Si $(r,\theta) \in V$ alors $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) > 0$ donc $\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \in U$.

2) Si $(x,y) \in U$, on a $x > 0$ et $y > 0$.
On a $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ et $y/x > 0$ donc $\theta = \arctan(y/x) \in]0,\pi/2[$. D'où $(t,\theta) \in V$.

3) a) Par composition, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et d'après la règle de la chaîne :
$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V, $f : (x,y) \mapsto g\left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan(y/x)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (par composition).

4) Si on a f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telle que :

$$\forall (x,y) \in U, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (\star)$$

Alors, d'après 3), on aura pour tout $(r,\theta) \in V$, $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)$.
Et réciproquement si g vérifie cette équation sur V, f vérifiera $(\star)$.

Solutions pour g

En intégrant $\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{1}{r}$ par rapport à r, on obtient que les solutions sont les fonctions $g : (r,\theta) \mapsto \cos(\theta)\ln(r) + C(\theta)$ où C est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2[$.

Solutions pour f

Finalement f vérifie $(\star)$ si, et seulement si, il existe une fonction C de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2[$ telle que

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C\big(\arctan(y/x)\big).$$

Exercice 8

1) a) La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (produit de fonctions continues) donc la ligne de niveau $\overline{U} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\big\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Donc U est un ouvert car c'est le complémentaire d'un fermé.
f est définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme somme et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Pour $(x,y) \in U$, on a :
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$