

# RÉPONSE TEMPORELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE / STABILITÉ

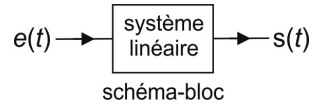
## 1. PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

### 1.1 Linéarité

Considérons un système auquel on applique un signal  $t \mapsto e(t)$  appelé signal d'entrée (ou : *excitation*). La *réponse* du système à ce signal est un signal de sortie  $t \mapsto s(t)$ .

Par exemple, pour un microphone, l'entrée est une surpression, pour un accéléromètre, c'est une accélération, pour une thermistance c'est une température, et dans les trois cas la sortie est une tension électrique, alors que pour un moteur à courant continu, l'entrée est une tension et la sortie une vitesse de rotation.

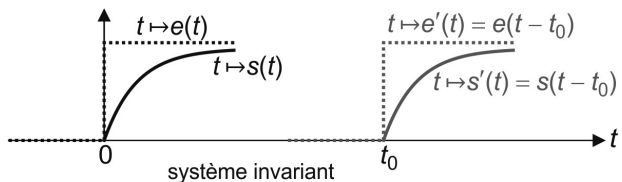
La sortie d'un système est donc une fonction de l'entrée, ce que traduit le schéma-bloc ci-contre.



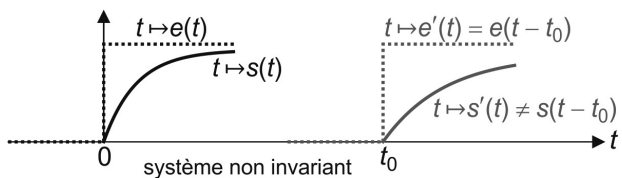
Il y a souvent unidirectionnalité : on n'obtiendra pas  $e$  en entrée du système si l'on applique  $s$  en sortie (en électronique, on risque même de détruire des composants si l'on procède ainsi). Si  $e \rightarrow s$ , on n'a pas  $e \leftarrow s$ .

Soit  $s_1$  la réponse du système à une entrée  $e_1$ ,  $s_2$  à une entrée  $e_2$ , le système est *linéaire* si  $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , la réponse à  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$  est  $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ .

Le système linéaire est *invariant* si la réponse ne dépend pas de l'instant  $t_0$  où l'on applique le signal d'entrée (qui est nul pour  $t < t_0$ ).



Ce ne serait pas le cas par exemple si le système linéaire contient une résistance électrique qui a varié entre deux expériences suite à une élévation de la température.



Mathématiquement : pour un système invariant, si la réponse à  $t \mapsto e(t)$  est  $t \mapsto s(t)$ , la réponse à  $t \mapsto e(t - t_0)$  est  $t \mapsto s(t - t_0)$  quel que soit  $t_0$ .

## 1.2 Régime transitoire / régime forcé

### Équation différentielle liant la sortie et l'entrée

Considérons un système linéaire pour lequel la sortie et l'entrée sont reliées par une équation différentielle qui est alors *linéaire* :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = b_0 e + b_1 \frac{de}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e}{dt^m}, \text{ avec } (a_0, b_0) \neq (0, 0), \text{ soit :}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k s}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell \frac{d^\ell e}{dt^\ell}. \text{ L'entier } n \text{ s'appelle l'ordre du système.}$$

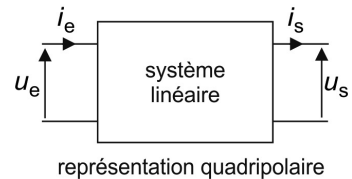
On remarque que si  $(a_0, b_0) = (0, 0)$ , on pourrait intégrer au moins une fois la relation entre  $s$  et  $e$ , et l'ordre du système ne serait plus  $n$ .

Les coefficients  $a_k$  et  $b_\ell$  sont indépendants du temps pour un système invariant (en électronique, c'est le cas si les résistances, inductances, capacités... sont constantes).

Dans le cas le plus général, un système linéaire peut avoir plusieurs grandeurs d'entrée et de sortie.

Par exemple, si l'on représente un système électronique sous la forme d'un *quadripôle* (2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie), on a  $e(t) = \begin{pmatrix} u_e(t) \\ i_e(t) \end{pmatrix}$  et

$$s(t) = \begin{pmatrix} u_s(t) \\ i_s(t) \end{pmatrix}.$$



Nous nous limiterons ici au cas où l'entrée et la sortie sont des scalaires.

### Résolution

Pour une entrée  $e$  donnée, l'équation différentielle linéaire régissant  $s$  se met sous la forme :  $a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$ , avec  $t \mapsto f(t)$  fonction du temps connue.

En se donnant  $n$  conditions initiales (C.I) portant sur  $s$ , par exemple la donnée de  $s(0^+)$ ,  $\frac{ds}{dt}(0^+)$ , ...,  $\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(0^+)$ , il y a unicité de la solution  $s$ .

La linéarité permet de décomposer la réponse en  $s = s_p + s_g$  :

- $s_p$  est une solution *particulière* de l'équation  $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$ .
- $s_g$  est la solution *générale* de l'équation *homogène*  $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = 0$ .

Les solutions de l'équation homogène forment un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , c'est-à-dire qu'elles s'expriment sur une base de  $n$  solutions  $\{t \mapsto s_k(t)\}$  avec  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour trouver cette base, on cherche d'abord des solutions complexes de la forme  $t \mapsto e^{rt}$ , avec  $r \in \mathbb{C}$ .

En « injectant »  $t \mapsto s(t) = Ke^{rt}$  dans l'équation homogène, on trouve que  $r$  doit alors être solution de :

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n = 0, \text{ appelée équation caractéristique associée.}$$

Il y a  $n$  racines complexes de cette équation (supposées toutes différentes) que l'on note  $r_k = \alpha_k + j\beta_k$  avec  $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{C}^2$  et  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et donc  $n$  fonctions indépendantes  $t \mapsto e^{r_k t}$  qui forment une base de l'espace des solutions complexes de l'équation homogène.

En formant des combinaisons linéaires des solutions complexes  $\{t \mapsto e^{r_k t}\}$  de l'équation homogène, on trouve une base de fonctions réelles  $\{t \mapsto s_k(t)\}$ , avec  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , des solutions de cette équation.

La solution la plus générale de l'équation complète  $a_0s + a_1 \frac{ds}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s}{dt^n} = f$  se met donc sous la forme  $s = s_p + \sum_{k=1}^n \lambda_k s_k$ .

Les  $n$  coefficients  $\lambda_k$  (constantes d'intégrations) sont déterminés en résolvant un système linéaire de  $n$  équations linéaires que l'on obtient grâce à la connaissance des C.I :  $s(0^+)$ ,  $\frac{ds}{dt}(0^+)$ , ...,  $\frac{d^{n-1}s}{dt^{n-1}}(0^+)$ . On sait calculer  $s$ .

### Stabilité d'un système linéaire

S'il existe ne serait-ce qu'une seule racine  $r_k = \alpha_k + j\beta_k$  de l'équation caractéristique dont la partie réelle est positive :  $\alpha_k = \text{Re}(r_k) > 0$ , la solution  $t \mapsto e^{\alpha_k t} \underbrace{e^{j\beta_k t}}_{\text{bornée}}$  diverge pour  $t \rightarrow \infty$ .

En pratique, une telle divergence est limitée par des phénomènes non-linéaires, comme la saturation de certains composants électroniques, ou par la destruction de ces composants.

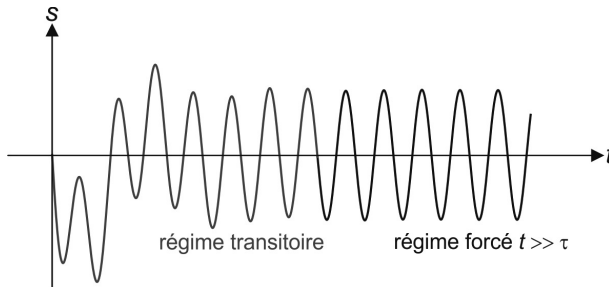
Un système linéaire est défini comme stable si *toutes* les solutions de l'équation caractéristique ont une partie réelle strictement négative :  $\alpha_k = \text{Re}(r_k) < 0 \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On a alors  $s_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ .

Remarquons que le cas particulier  $\alpha_k = \text{Re}(r_k) = 0$  est un cas critique, dont on verra qu'il correspond aux oscillateurs sinusoïdaux.

Un système stable est caractérisé par une durée  $\tau$  telle que :

- Pour  $t \gg \tau$ ,  $s(t) \approx s_p(t)$  : le système est en régime forcé (ou : établi).
- À des temps plus courts,  $s(t) = s_p(t) + s_g(t)$  : le système est en régime transitoire.



Remarquons qu'il n'y a pas unicité de  $s_p$  : on a une infinité de solutions particulières. Une solution particulière étant choisie, il y a en revanche unicité des coefficients  $\lambda_k$ , et de la solution  $s$  vérifiant les C.I. Deux solutions particulières différentes correspondent donc à deux jeux différents de coefficients  $\lambda_k$  :

$$s_p(t) = s(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k s_k(t), \text{ et } s'_p(t) = s(t) - \sum_{k=1}^n \lambda'_k s_k(t). \text{ On a donc :}$$

$$s_p(t) - s'_p(t) = \sum_{k=1}^n (\lambda'_k - \lambda_k) s_k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 : \text{ toutes les solutions particulières sont équivalentes pour } t \gg \tau.$$

Contrairement aux solutions de l'équation homogène, elles dépendent de la forme de l'excitation  $t \mapsto e(t)$ .

### 1.3 Régime sinusoïdal forcé / régime stationnaire

#### Régime sinusoïdal forcé (r.s.f)

Lorsque l'excitation  $t \mapsto e(t)$  est sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ , la réponse  $t \mapsto s(t)$  en régime forcé est également sinusoïdale et de même pulsation (elle a la même forme que l'excitation et l'on dit que les signaux sinusoïdaux sont des fonctions isomorphes des systèmes linéaires).

$$e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t) = \text{Re}[\underline{e}(t)] \rightarrow \boxed{\text{système linéaire}} \rightarrow s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[\underline{s}(t)]$$

Les grandeurs  $E$  et  $S$  sont appelées *valeurs efficaces* des signaux  $e$  et  $s$ . L'angle  $\varphi$  est l'avance de phase de  $s$  par rapport à  $e$ , ou déphasage de  $s$  par rapport à  $e$ .

Le système étant linéaire et invariant, on peut utiliser la notation complexe. La réponse à  $t \mapsto \underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$  est alors  $t \mapsto \underline{s}(t) = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)}$ .

Posons  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (période des signaux) et démontrons ce résultat.

Si la réponse à  $t \mapsto e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$  est  $t \mapsto S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ , la réponse à :  
 $t \mapsto e\left(t - \frac{T}{4}\right) = E\sqrt{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{T}{4}\right)\right] = E\sqrt{2} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2}\right] = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$  est :

$$t \mapsto s\left(t - \frac{T}{4}\right) = S\sqrt{2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{T}{4}\right) + \varphi\right] = S\sqrt{2} \cos\left[\omega t - \frac{\pi}{2} + \varphi\right] = E\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi).$$

La réponse à  $t \mapsto \underline{e}(t) = E\sqrt{2}e^{j\omega t} = E\sqrt{2} \cos(\omega t) + jE\sqrt{2} \sin(\omega t)$  est donc bien :  
 $t \mapsto S\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) + jS\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi) = S\sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{s}(t)$  pour un système linéaire.

On définit la fonction de transfert  $H(j\omega) = \frac{S}{E}$  (ce qui n'a de sens qu'en régime sinusoïdal forcé). On a donc :

$$H(j\omega) = \frac{S}{E} = \frac{S}{E} e^{j\varphi} = G(\omega) e^{j\varphi(\omega)}.$$

$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{S(\omega)}{E}$ , module de la fonction de transfert, est le *gain* : rapport de la valeur efficace du signal de sortie sur celle du signal d'entrée (c'est aussi le rapport des valeurs maximales).

$\varphi(\omega) = \arg[H(j\omega)]$  est le déphasage du signal de sortie par rapport à celui d'entrée.

Ces grandeurs dépendent de la pulsation  $\omega$  : à valeur efficace  $E$  du signal d'entrée fixée, la valeur efficace  $S$  du signal de sortie varie avec  $\omega$ , tout comme le déphasage  $\varphi$ .

### Régime stationnaire (ou permanent)

C'est le cas particulier du r.s.f où  $\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow T \rightarrow \infty$ .

On a alors une entrée  $t \mapsto e(t) = E\sqrt{2} = Cte$  dont la réponse vaut :  
 $t \mapsto s(t) = S\sqrt{2} \cos \varphi = Cte$ .

## 1.4 Lien entre la fonction de transfert et l'équation différentielle / critère de stabilité

### Équivalence entre fonction de transfert et équation différentielle

En r.s.f :  $\underline{s}(t) = \sqrt{2}e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s}$ , et plus généralement  $\frac{d^k \underline{s}}{dt^k} = (j\omega)^k \underline{s}$ .

L'équation différentielle  $\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \underline{s}}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell \frac{d^\ell \underline{e}}{dt^\ell}$  qui relie  $\underline{s}$  et  $\underline{e}$  est la même que celle qui relie  $s$  et  $e$ , ce qui se démontre comme on l'a vu au 1.3 en utilisant la linéarité et l'invariance du système. Elle s'écrit donc  $\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{s} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell \underline{e}$ , d'où :

$$H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}.$$

La fonction de transfert est un quotient de *polynômes*  $P$  et  $Q$  de la variable  $j\omega$ .

Inversement, la connaissance de la fonction de transfert permet de trouver l'équation différentielle qui relie  $s$  et  $e$ . Pour cela, il suffit de :

- Mettre  $H(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$  sous la forme d'un quotient  $\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$  de polynômes.
- Effectuer le produit en croix pour obtenir  $\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{s} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell (j\omega)^\ell \underline{e}$ .
- Utiliser les équivalences  $(j\omega)^k \underline{s} \leftrightarrow \frac{d^k \underline{s}}{dt^k}$  et  $(j\omega)^\ell \underline{e} \leftrightarrow \frac{d^\ell \underline{e}}{dt^\ell}$ .

Ainsi le passage par le r.s.f permet de trouver une équation différentielle qui est valable *quel que soit* le régime étudié.

### Critère de stabilité

Utilisons la notation de Laplace  $H(p)$ , au lieu  $H(j\omega)$ , pour la fonction de trans-

$$\text{fert : } H(p) = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} = \frac{P(p)}{Q(p)} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \underline{s}}{dt^k} = \sum_{\ell=0}^m b_\ell \frac{d^\ell \underline{e}}{dt^\ell}.$$

Il y a stabilité si les racines  $r_k$  du polynôme caractéristique  $Q(p) = \sum_{k=0}^n a_k p^k$  ont

toutes une partie réelle strictement négative, or ce polynôme se trouve au dénominateur de la fonction de transfert :

Pour un système de fonction de transfert  $p \mapsto H(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes, il y a stabilité si et seulement si les racines de  $Q$ , appelées *pôles* de  $H$ , ont toutes une partie réelle strictement négative.

On montre qu'une condition nécessaire (mais pas suffisante) de stabilité est que tous les coefficients  $a_k$  soient du même signe.

Le système linéaire de fonction de transfert  $p \mapsto H(p) = \frac{\sum_{\ell=0}^m b_\ell p^\ell}{\sum_{k=0}^n a_k p^k}$  est instable si tous les coefficients  $a_k$  ne sont pas du même signe.

Dans le cas  $n \leq 2$ , la réciproque est vraie :

Le système linéaire dont la fonction de transfert  $p \mapsto H(p) = \frac{P(p)}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}$  est mise sous forme d'un rapport de polynômes, est stable si et seulement si les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  sont du même signe.

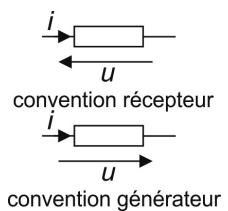
## 2. CIRCUITS LINÉAIRES

### 2.1 Dipôles linéaires passifs

Quel que soit le dipôle considéré (linéaire ou non), la puissance instantanée *reçue* vaut  $p(t) = u(t)i(t)$  si la tension  $u$  aux bornes du dipôle et l'intensité  $i$  du courant le traversant sont orientées respectivement selon la convention *récepteur*.

La puissance  $p(t)$  est algébrique : elle est positive si le dipôle reçoit effectivement de la puissance à la date  $t$ , négative s'il en fournit.

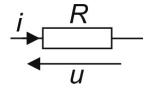
Avec la convention *générateur*,  $p(t) = u(t)i(t)$  devient la puissance instantanée *fournie* par le dipôle.



Les circuits étudiés comportent trois types de dipôles linéaires : les conducteurs ohmiques, les condensateurs et les bobines.

### Conducteur ohmique

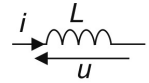
Avec la convention récepteur,  $u = Ri$ .  $R > 0$  est la résistance du conducteur ohmique en ohm ( $\Omega$ ). La puissance reçue vaut  $p = ui = Ri^2 > 0$  : un conducteur ohmique est récepteur d'énergie à tout instant.



conducteur ohmique

### Bobine (idéale : pas de résistance)

Avec la convention récepteur,  $u = L \frac{di}{dt}$ .  $L > 0$  est l'inductance de la bobine en henry (H). La puissance reçue vaut :



bobine idéale

$p = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right]$ . Or la puissance instantanée reçue est le rapport entre l'énergie  $\delta E$  reçue par le dipôle pendant la durée infinitésimale  $dt$ , et cette durée  $dt$  :

$p = \frac{\delta E}{dt}$ . On en déduit le bilan d'énergie suivant :  $d \left[ \frac{1}{2} Li^2 \right] = \delta E$ .

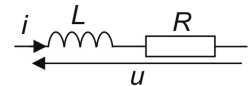
Si par exemple la bobine reçoit pendant une durée  $\Delta t$  une énergie de 1J, la quantité  $\frac{1}{2} Li^2$  augmente de 1J. La quantité  $E_L = \frac{1}{2} Li^2$ , propre à la bobine, est l'énergie emmagasinée par celle-ci (à une constante près que l'on prend nulle).

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2 \text{ est l'énergie emmagasinée par la bobine}$$

Comme la puissance instantanée reçue ne peut pas être infinie, la fonction  $t \mapsto E_L(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$  doit être une fonction continue du temps, donc :

L'intensité  $i$  dans la bobine est une fonction continue du temps.

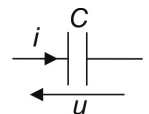
Une bobine réelle possède une résistance  $R$  et est donc modélisée par l'association série  $(L, R)$ .



bobine réelle

### Condensateur

Avec la convention récepteur,  $i = C \frac{du}{dt}$ .  $C > 0$  est la capacité du condensateur en farad (F). La puissance reçue vaut :



condensateur

$p = ui = Cu \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} Cu^2 \right]$ . Or, la puissance instantanée reçue pen-

dant  $dt$  vaut  $p = \frac{\delta E}{dt}$ . On en déduit le bilan d'énergie suivant :  $d \left[ \frac{1}{2} Cu^2 \right] = \delta E$ .