

2 Cinétique

2.1 Masse et inertie

2.1.1 Notions d'inertie

Nous savons, par expérience, qu'il est plus « difficile » d'accélérer un camion qu'une moto comme il est plus « difficile » de le freiner. L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement.

Pour un mouvement de translation, la masse suffit pour définir cette quantité, par contre pour un mouvement de rotation, il est nécessaire de préciser la répartition de cette masse.

La cinétique est l'étude des caractéristiques d'inertie d'un solide.

2.1.2 Masse - Rappels

La masse caractérise la quantité de matière, c'est une grandeur complètement additive.

Soit, Σ_1, Σ_2 deux systèmes matériels disjoints alors :

$$m(\Sigma_1 \cup \Sigma_2) = m(\Sigma_1) + m(\Sigma_2)$$

avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.

La masse m_Σ de l'ensemble Σ est définie par :

$$m_\Sigma = \int_\Sigma dm = \int_\Sigma \rho(P) dv$$

avec $\rho(P)$ masse volumique au point P et dv un élément de volume.

Remarque :

- Si le système matériel est assimilable à un volume, on parle de masse volumique $\rho(P)$ au point P : $dm = \rho(P)dv$.
- Si le système matériel est assimilable à une surface on parle de masse surfacique $\sigma(P)$ au point P : $dm = \sigma(P)ds$.
- Si le système matériel est assimilable à une ligne, on parle de masse linéique $\lambda(P)$ au point P : $dm = \lambda(P)dl$.

Conservation de la masse

On admet en mécanique classique que la masse est une grandeur indépendante du temps, ainsi pour deux instants t_1 et t_2 quelconques :

$$m(\Sigma, t_1) = m(\Sigma, t_2).$$

On en déduit une relation importante :

$$\left[\frac{d}{dt} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{f(P, t)} dm \right]_R = \int_{P \in \Sigma} \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{f(P, t)} \right]_R dm.$$

qui permet d'inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport à la masse.

2.1.3 Centre d'inertie

a) Définition

On appelle centre d'inertie du système matériel Σ , le point G défini par :

$$\int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{GP} \, dm = \vec{0}.$$

En faisant intervenir le point O, la relation devient

$$\int_{\Sigma} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP}) \, dm = \int_{\Sigma} \overrightarrow{GO} \, dm + \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} \, dm = \vec{0}$$

avec $m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{OG} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OP} \, dm$ et finalement

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{P \in \Sigma} \overrightarrow{OP} \, dm$$

Dans un repère cartésien, on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées de \overrightarrow{OG} et (x, y, z) les coordonnées de \overrightarrow{OP} , on peut donc écrire :

$$x_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} x \cdot dm, \quad y_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} y \cdot dm, \quad z_G = \frac{1}{m_{\Sigma}} \int_{\Sigma} z \cdot dm.$$

Remarques :

- Si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide.
- Si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.
- Le centre d'inertie est confondu avec centre de gravité dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.

b) Centre d'inertie d'un ensemble de corps

Un ensemble matériel Σ est composé de n sous-ensembles matériels Σ_i . À chaque sous-ensemble Σ_i est associé sa masse m_i et son centre d'inertie G_i , alors

$$\overrightarrow{OG_{\Sigma}} = \frac{1}{m_{\Sigma}} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}.$$

Le centre d'inertie d'un ensemble de corps est le barycentre des centres d'inertie.

Si les corps sont des solides indéformables immobiles les uns par rapport aux autres, le centre d'inertie de l'ensemble est fixe dans un repère lié à cet ensemble.

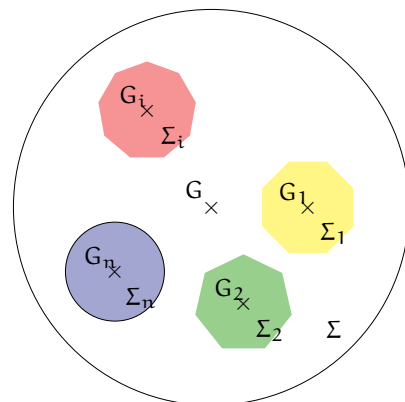


FIGURE 2.1 – Centre d'inertie d'un ensemble de corps

c) Théorèmes de Guldin

Énoncé (Centre d'inertie d'une courbe plane) Soient (C) une courbe du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (C). L'aire de la surface engendrée par la rotation de la courbe (C) autour de la droite (Δ) est égale au produit de la longueur de la courbe L par le périmètre décrit par son centre d'inertie $2\pi \cdot r_G$.

$$S = 2\pi \cdot r_G \cdot L$$

On associe à la courbe (C) une masse linéique λ constante, $dm = \lambda \cdot dl$ d'où la masse totale de la courbe $m_c = \lambda \cdot L$.

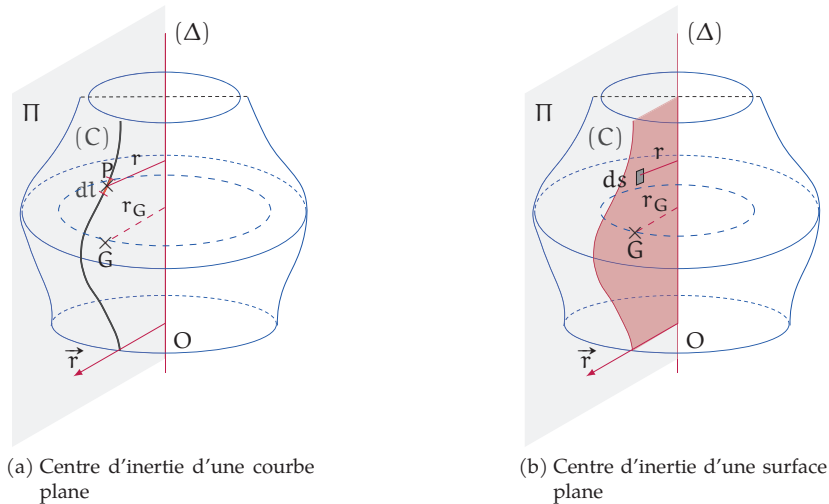


FIGURE 2.2 – Théorèmes de Guldin

La position du centre d'inertie de la courbe est calculée par la relation générale :

$$m_c \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \cdot dm$$

Ici cette relation devient :

$$\lambda \cdot L \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \cdot \lambda \cdot dl$$

Après simplification puis en ne prenant que la projection suivant \vec{r} :

$$L \cdot \vec{OG} = \int_C \vec{OP} \cdot dl \Rightarrow L \cdot r_G = \int_C r \cdot dl$$

Calculons maintenant la surface engendrée par la rotation de la courbe

$$S = \int_S r \cdot d\theta \cdot dl = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_C r \cdot dl = 2\pi \int_C r \cdot dl$$

En substituant $\int_C r \cdot dl = L \cdot r_G$ dans cette égalité on retrouve bien le résultat cherché.

Énoncé (Centre d'inertie d'une surface plane homogène) Soient (S) une surface du plan (Π) et (Δ) une droite du plan ne coupant pas (S).

Le volume engendré par la rotation de la surface plane tournant autour de l'axe (Δ) est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre décrit par son centre d'inertie.

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S$$

On démontre cette égalité comme la précédente. On associe à (S) une masse surfacique $dm = \sigma \cdot ds$ constante et $m_S = \sigma \cdot S$.

Par définition :

$$m_S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot dm \Rightarrow S \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OP} \cdot ds$$

soit en projection suivant \vec{r}

$$S \cdot r_G = \int_S r \cdot ds$$

Le volume engendré par la rotation de la surface (S) s'écrit :

$$V = \int_V r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S r \cdot ds = 2\pi \int_S r \cdot ds$$

d'où la relation cherchée :

$$V = 2\pi \cdot r_G \cdot S.$$

Remarque : L'utilisation des théorèmes de Guldin permet de simplifier le calcul de position du centre d'inertie dans la mesure où l'on connaît les caractéristiques du volume et de la surface balayée.

2.2 Moments d'inertie

La masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement plus complexe, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide. Les moments et produits d'inertie caractérisent cette répartition.

2.2.1 Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à un point A la quantité positive :

$$I_A(S) = \int_S \overline{AP}^2 dm \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

2.2.2 Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide S par rapport à une droite (Δ) la quantité positive

$$I_\Delta(S) = \int_S \left(\vec{\delta} \wedge \overline{AP} \right)^2 dm \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

En faisant intervenir le point H , projection de P sur la droite (Δ) on déduit :

$$I_\Delta(S) = \int_S \overline{HP}^2 dm = \int_S d_P^2 \cdot dm$$

avec d_P distance du point P à la droite (Δ).

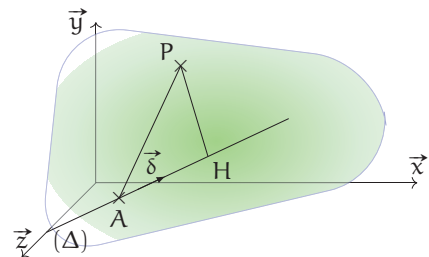


FIGURE 2.3 – Moment d'inertie par rapport à une droite

Le moment d'inertie par rapport à une droite est le même en tout point de la droite.

2.2.3 Rayon de giration

Le moment d'inertie étant homogène au produit d'une masse par une distance au carré, il est toujours possible d'écrire le moment d'inertie autour d'un axe d'un solide quelconque sous la forme :

$$I = M \cdot R_g^2$$

avec M la masse du solide et R_g le rayon de giration.

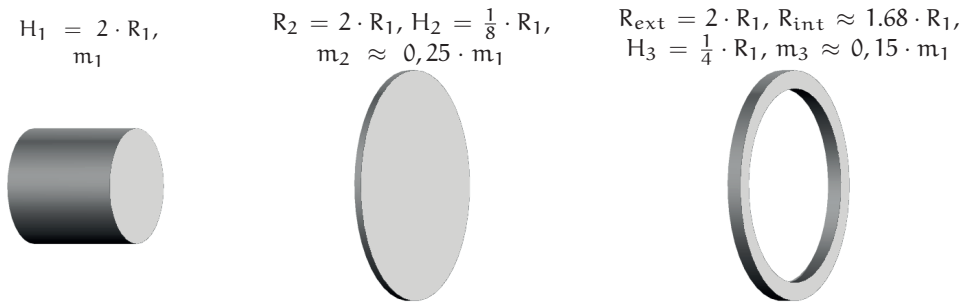


FIGURE 2.4 – Rayon de giration

Le rayon de giration précise la répartition des masses autour de l'axe considéré, ainsi les trois solides de la figure 2.4 ont le même moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation alors que les masses sont dans un rapport dans un rapport de 1 à 7.

2.2.4 Moments d'inertie dans un repère cartésien

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un point P de coordonnées x, y, z dans R . Déterminons les différents moments d'inertie dans ce repère.

Moment d'inertie du solide S par rapport au point O dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\begin{aligned}
 I_O(S) &= \int_S \overline{OP}^2 \, dm \text{ soit} \\
 &= \int_S (x^2 + y^2 + z^2) \, dm
 \end{aligned}$$

Moment d'inertie du solide S par rapport à l'axe (O, \vec{x})

$$\begin{aligned}
 I_{(O, \vec{x})}(S) &= \int_S (\vec{x} \wedge \overline{OP})^2 \, dm = \int_S (\vec{x} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))^2 \cdot dm \\
 I_{(O, \vec{x})}(S) &= \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm
 \end{aligned}$$

Par analogie, on peut écrire :

$$I_{(O, \vec{x})} = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{x});$$

$$I_{(O, \vec{y})} = \int_S (z^2 + x^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{y});$$

$$I_{(O, \vec{z})} = \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport à } (O, \vec{z}).$$

Par extension on définit aussi :

$$I_{(O\vec{x}\vec{y})} = \int_S z^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{x}, \vec{y});$$

$$I_{(O\vec{y}\vec{z})} = \int_S x^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{y}, \vec{z});$$

$$I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \int_S y^2 \cdot dm, \text{ moment d'inertie du solide par rapport au plan } (O, \vec{z}, \vec{x}).$$

2.2.5 Relations entre les moments d'inertie

$$- I_O = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})} = \frac{1}{2} (I_{(O,\vec{x})} + I_{(O,\vec{y})} + I_{(O,\vec{z})})$$

$$- I_{(O,\vec{x})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{z}\vec{x})}$$

$$- I_{(O,\vec{y})} = I_{(O\vec{x}\vec{y})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$$

$$- I_{(O,\vec{z})} = I_{(O\vec{z}\vec{x})} + I_{(O\vec{y}\vec{z})}$$

2.2.6 Théorème de Huygens

Soit un solide S de centre d'inertie G et de masse m (figure 2.5).

- (Δ_1) , une droite passant par A de vecteur unitaire $\vec{\delta}$;
- (Δ_2) , une droite parallèle passant par G;
- d, la distance entre les deux droites.

On note :

$$- I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP})^2 dm, \text{ le moment d'inertie par rapport à } (\Delta_1)$$

$$- I_{(G,\vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{GP})^2 dm, \text{ le moment d'inertie par rapport à } (\Delta_2)$$

- H la projection du point P du solide S sur (Δ_1)

- K la projection sur (Δ_2) .

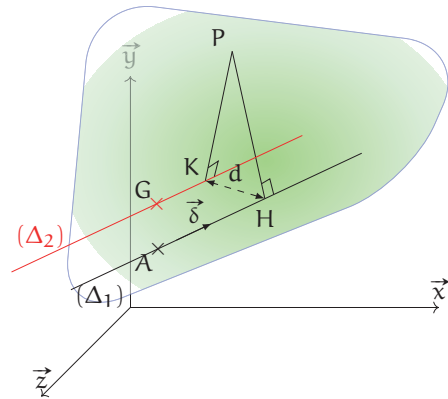


FIGURE 2.5 – Théorème de Huygens

Nous savons que

$$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S (\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{AP})^2 dm = \int_S \overrightarrow{HP}^2 dm = \int_S (\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KP})^2 dm$$

$$I_{(A,\vec{\delta})} = \int_S \overrightarrow{HK}^2 dm + \int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} dm + \int_S \overrightarrow{KP}^2 dm$$

Le premier terme s'écrit : $\int_S \overrightarrow{HK}^2 dm = m \cdot d^2$ et on reconnaît le troisième : $\int_S \overrightarrow{KP}^2 dm = I_{(G,\vec{\delta})}$

Il ne reste plus qu'à déterminer le dernier : $\int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} dm = 2\overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KP} dm$ en faisant intervenir le centre d'inertie G

$$\int_S 2\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{KP} dm = 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{GP} dm$$

$$= 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{KG} dm + 2 \cdot \overrightarrow{HK} \cdot \int_S \overrightarrow{GP} dm$$

Par construction :

$$\overline{HK} \perp \overline{KG} \Rightarrow 2 \cdot \overline{HK} \cdot \int_S \overline{KG} \, dm = 0 \text{ et par définition du centre d'inertie : } \int_S \overline{GP} \, dm = 0.$$

Finalement, on déduit la relation : $I_{(A, \vec{\delta})} = I_{(G, \vec{\delta})} + m \cdot d^2$.

Énoncé (Théorème de Huygens) *Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $(A, \vec{\delta})$ est égal au moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{\delta})$, parallèle et passant par le centre d'inertie du solide, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance séparant les deux axes.*

$$I_{(A, \vec{\delta})} = I_{(G, \vec{\delta})} + m \cdot d^2$$

Énoncé (Corollaire) *De tous les axes parallèles à une direction donnée, celui par rapport auquel le moment d'inertie est minimum est l'axe passant par G.*

Relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles

On se propose de déterminer une relation entre les moments d'inertie par rapport à deux droites parallèles quelconques $I_{(A, \vec{\delta})}(S)$ et $I_{(B, \vec{\delta})}(S)$ d'un solide S (figure 2.6).

$$I_{(A, \vec{\delta})}(S) = I_{(G, \vec{\delta})}(S) + m \cdot d_A^2$$

$$I_{(B, \vec{\delta})}(S) = I_{(G, \vec{\delta})}(S) + m \cdot d_B^2$$

D'où la relation entre les moments d'inertie

$$I_{(A, \vec{\delta})}(S) - I_{(B, \vec{\delta})}(S) = m \cdot d_A^2 - m \cdot d_B^2$$

avec d_A et d_B respectivement distance entre les droites Δ_A , Δ_B et Δ_G .

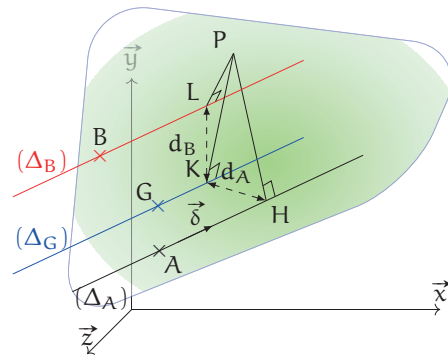


FIGURE 2.6 – Relation entre les moments d'inertie

2.2.7 Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de symétrie dans la répartition des masses.

La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie dans le chapitre suivant.

2.3 Opérateur d'inertie

2.3.1 Opérateur d'inertie en un point

L'opérateur d'inertie synthétise l'ensemble des caractéristiques d'inertie du solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par une matrice.

a) Définition

On appelle opérateur d'inertie $\overline{\overline{J_O(S)}}$ au point O d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} de l'espace associe le vecteur

$$\overline{\overline{J_O(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P \in S} (\overline{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overline{OP})) \, dm.$$

b) Matrice d'inertie

Soit

- $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère, et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base;
- P , un point du solide S , avec $\vec{OP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$;
- $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}$, un vecteur.

Déterminons $\vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP})$

$$\begin{aligned} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) &= \\ (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge ((\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}) \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z})) &= \\ \left(\begin{array}{ccc} +\alpha \cdot (y^2 + z^2) & -\beta \cdot x \cdot y & -\gamma \cdot x \cdot z \\ -\alpha \cdot x \cdot y & +\beta \cdot (z^2 + x^2) & -\gamma \cdot y \cdot z \\ -\alpha \cdot x \cdot z & -\beta \cdot y \cdot z & +\gamma \cdot (x^2 + y^2) \end{array} \right) \vec{x} &+ \\ \left(\begin{array}{ccc} -\alpha \cdot x \cdot y & +\beta \cdot (z^2 + x^2) & -\gamma \cdot y \cdot z \end{array} \right) \vec{y} &+ \\ \left(\begin{array}{ccc} -\alpha \cdot x \cdot z & -\beta \cdot y \cdot z & +\gamma \cdot (x^2 + y^2) \end{array} \right) \vec{z} \end{aligned}$$

En intégrant sur le solide S :

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OP}) \cdot dm &= \\ \left(\begin{array}{ccc} +\alpha \cdot \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm & -\beta \cdot \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm & -\gamma \cdot \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm \\ -\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm & +\beta \cdot \int_{P \in S} (z^2 + x^2) \cdot dm & -\gamma \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm \\ -\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm & -\beta \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm & +\gamma \cdot \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \end{array} \right) \vec{x} &+ \\ \left(\begin{array}{ccc} -\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm & +\beta \cdot \int_{P \in S} (z^2 + x^2) \cdot dm & -\gamma \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm \end{array} \right) \vec{y} &+ \\ \left(\begin{array}{ccc} -\alpha \cdot \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm & -\beta \cdot \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm & +\gamma \cdot \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \end{array} \right) \vec{z} \end{aligned}$$

On peut mettre ce résultat sous la forme du produit d'une matrice et du vecteur \vec{u}

$$\overline{\overline{J}}_O(S) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} + \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm & - \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm & - \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm \\ - \int_{P \in S} x \cdot y \cdot dm & + \int_{P \in S} (z^2 + x^2) \cdot dm & - \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm \\ - \int_{P \in S} x \cdot z \cdot dm & - \int_{P \in S} y \cdot z \cdot dm & + \int_{P \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice est caractéristique de la répartition de la matière d'un solide autour d'un point (ici O) et dans une base donnée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Par convention, on pose

$$\overline{\overline{J}}_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}} \quad \text{ou} \quad \overline{\overline{J}}_O(S) = \begin{pmatrix} I_{(O, \vec{x})} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{(O, \vec{y})} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{(O, \vec{z})} \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

On reconnaît sur la diagonale de la matrice

$$A = I_{(O, \vec{x})} = \int_{P \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm, \text{ le moment d'inertie du solide } S \text{ autour de l'axe } (O, \vec{x});$$