Chapitre 1

METHODES SUR LES MODES DE GENERATION D'UNE SUITE NUMERIQUE

Une suite c'est intuitivement, comme son nom l'indique, une suite de nombres. Par exemple 1, 2, 3, 4,… est une suite (c'est la suite des nombres entiers), 2, 4, 6,… aussi est une suite (la suite des nombres pairs), 1, 3, 5, 7, 9, 11… également (c'est la suite des nombres impairs), etc. Il y a en fait de multiples moyens d'en créer bien d'autres : par une phrase, par une formule (ce qui les rapproche des fonctions), par une relation de récurrence, par une fonction, par un graphique, par un problème de dénombrement, par un algorithme… par un mot d'amour (non, c'est pour rire…) et selon les cas il n'est pas toujours si simple d'en obtenir une expression.
Selon le mode de génération d'une suite (la façon dont on la crée) on peut étudier ses premiers termes, c'est l'objet des méthodes qui suivent : s'en sortir dans tous les cas de figure.
Précisons enfin l'intérêt des suites (vous vous doutiez bien qu'il y en avait un quand même, non ?). On vous a souvent dit que les maths pouvaient servir dans les autres matières (euh… on sait si pour vous c'est une bonne nouvelle…), et bien c'est vrai. Un problème physique, biologique ou économique peut être résolu et modélisé par les maths (modéliser c'est le rendre mathématiquement exploitable), et souvent pour le faire on utilise des suites. Quoi, vous êtes en stress ? Keep cool, tout va bien se passer !

1. Suite générée par une phrase

Tout d'abord bien comprendre les notations (qui peuvent être déstabilisantes) : (U_n) (avec des parenthèses) désigne la suite de terme général U_n (sans parenthèses). U_n lui, désigne le terme général de rang n (ou d'indice n). Par exemple, U_0 est le terme de rang 0, U_1 celui de rang 1, etc.
n est l'indice, n est entier et est toujours positif. Ça va, on continue ?

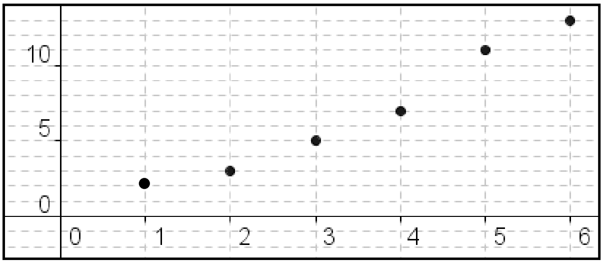
METHODE 1 : Comment déterminer les premiers termes de (U_n) où U_n est définie par une phrase ?

■ **Principe**

- Bien réfléchir, par exemple où commence la suite, plus exactement à quel rang, U_0 ? U_1 ? U_5 ?
- Pour la représentation graphique, on met n en abscisses et U_n en ordonnées.

■ **Exemple :** *Soit (U_n) la suite définie par : "U_n désigne le n-ième nombre premier". Déterminer les six premiers termes, les représenter graphiquement dans un repère orthogonal (on n'est pas obligé de prendre la même unité).*

Vous rappelez-vous ce qu'est un nombre premier ? C'est un entier positif qui admet deux diviseurs seulement : 1 et lui-même. Voici le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13,... (Attention ! 1 n'est pas premier !).
U_0 n'a pas de sens (le 0-ième nombre premier, ça ne veut rien dire...). Le premier terme de la suite (U_n) est donc $U_1 = 2$, les autres sont : $U_2 = 3$, $U_3 = 5$, $U_4 = 7$, $U_5 = 11$, $U_6 = 13$ (Stop ! On a six termes !).
Pour la représentation graphique, on met n en abscisses et U_n en ordonnées (exactement comme avec une fonction où x est en abscisses et $f(x)$ en ordonnées), on trace un repère, ce qui donne :



REMARQUE : Il s'agit d'un nuage de points, pas d'une courbe, il ne faut surtout pas relier les points, ok ?

■ **Exemple célèbre : la suite de Fibonacci (1175-1220).** *On considère qu'un couple de lapins arrive à maturité sexuelle à l'âge de deux mois et que chaque couple donne chaque mois naissance à un autre couple. On part d'un seul couple de lapins. Soit (F_n) la suite définie par : « F_n désigne le nombre de couples au bout du n-ième mois ». Déterminer le nombre de lapins au bout d'1 an. Au bout de 2 ans.*

On part d'un couple, on a donc $F_0 = 1$.
Au bout d'1 mois, on a toujours $F_1 = 1$ (puisque le couple n'est âgé que de 1 mois, donc n'est pas encore à maturité sexuelle).
Au bout de 2 mois, on a $F_2 = 2$ (en effet, le couple de départ, âgé de 2 mois, est arrivé à maturité sexuelle et engendre un nouveau couple).
Au bout de 3 mois, on a : $F_3 = 3$ (c'est encore le couple de départ, toujours à maturité sexuelle qui vient d'engendrer un nouveau couple).
Au bout de 4 mois, on a $F_4 = 5$ (car sur les 3 couples, seuls 2 couples sont à maturité sexuelle, engendrant chacun un nouveau couple).
Au bout de 5 mois, on a : $F_5 = 8$ (car sur les 5 couples, il n'y en a que 3 à maturité sexuelle, engendrant chacun un nouveau couple).
Au bout de 6 mois, on a : $F_6 = 13$ (car sur les 8 couples, seuls 5 sont à maturité sexuelle).
Faisons une pause et regardons déjà les premiers termes de la suite :

$F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$. Essayons de comprendre la logique : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Mais oui : $1+1=2$, $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $5+8=13$ le prochain devrait être $8+13=21$ puis $13+21=34$...
On a la relation (dite de récurrence) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (chaque nouveau terme est la somme des deux précédents), relation qui va nous permettre (pour gagner du temps) d'utiliser un programme (sous Python) pour aller plus vite.

File Edit Format Run Options Window Help

```
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    else:
        return f(n-1)+f(n-2)
```

Ensuite, on appuie sur F5 (console IDLE) et on tape f(12) et f(24), voilà ce qui s'affiche :

```
>>> f(12)
233
>>> f(24)
75025
```

Cela nous dit que au bout d'1 an (soit 12 mois), on obtient 233 couples (soit 466 lapins, ah oui quand même !). Au bout de 2 ans (soit 24 mois) on obtient 75 025 couples (soit 150 050 lapins ! Rendez-vous compte : on est passé de 2 lapins à 150050 lapins, en seulement 2 ans ! Au secours !).

2. Suite générée par une formule explicite

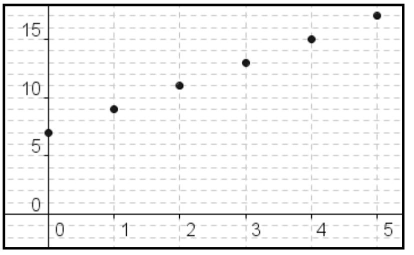
METHODE 2 : Comment déterminer algébriquement les premiers termes de la suite?

■ Principe

Remplacer n par le rang que vous cherchez (tout simplement), comme avec une fonction où on remplace x par une valeur : une suite (U_n) n'étant en fait rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers positifs), où n est la variable et U_n l'image (qui aurait pu être notée $U(n)$, d'ailleurs).

■ **Exemple :** *Soit (A_n) la suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 2n+7$. Déterminer les six premiers termes, les représenter graphiquement dans un repère orthogonal (on n'est pas obligé de prendre la même unité).*

La suite étant définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut commencer à $n = 0$, ce qui donne : $A_0 = 2 \cdot 0 + 7 = 7$, $A_1 = 2 \cdot 1 + 7 = 9$, $A_2 = 2 \cdot 2 + 7 = 11$, $A_3 = 2 \cdot 3 + 7 = 13$, $A_4 = 2 \cdot 4 + 7 = 15$, $A_5 = 2 \cdot 5 + 7 = 17$ (Stop ! On a les 6 premiers termes !), on a :



On peut constater que les points de la suite sont alignés. C'est normal : la suite (A_n) définie par $A_n = 2n + 7$ ressemble à la fonction f définie par $f(x) = 2x + 7$ qui est une fonction affine (rappel de 3e) dont la courbe est une droite !

METHODE 3 : Comment déterminer et représenter les premiers termes d'une suite à l'aide d'un tableur ?

■ **Principe**

Une ligne pour n avec les valeurs 0, 1, 2, etc.
Une ligne pour U_n.

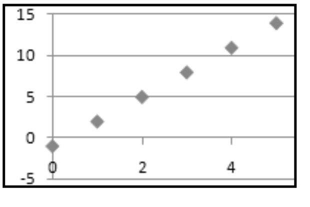
■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par :* $U_n = 3n - 1$. *Déterminer les six premiers termes, les représenter graphiquement dans un repère orthogonal (on n'est pas obligé de prendre la même unité).*

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	0	1	2	3	4	5
2	Un	-1	2	5	8	11	14

Dans B1, on écrit 0. Dans C1, on écrit 1. On sélectionne la plage B1:C1, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'en G1 (puisqu'on veut 6 termes, on va de U_0 à U_5).

Dans B2, on écrit =3*B1-1. On sélectionne la cellule B2, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à G2. Et voilà, on obtient nos six premiers termes, à savoir : $U_0 = -1$, $U_1 = 2$, $U_2 = 5$, $U_3 = 8$, $U_4 = 11$, et $U_5 = 14$.

Pour la représentation graphique, on va dans insertion > nuage de points > sélectionner des données > ajouter > valeurs de la série des abscisses x (là on sélectionne la plage B1:G1) > valeurs de la série des ordonnées y (là on sélectionne la plage B2:G2) > OK.



METHODE 4 : Comment déterminer et représenter les premiers termes d'une suite à l'aide d'un algorithme ?

■ Principe

Il faut utiliser une fonction Python (en utilisant l'instruction « def » puis une boule « for »), vite un exemple !

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_n = n^2 - 7n$. *Déterminer les cinq premiers termes.*

File Edit Format Run Options Window Help

```
def u(n):
    return n**2-7*n
for i in range(0,6):
    print("u(",i,")=",u(i))
```

On obtient, après avoir appuyé sur F5 (console Idle) :

```
u( 0 )= 0
u( 1 )= -6
u( 2 )= -10
u( 3 )= -12
u( 4 )= -12
u( 5 )= -10
```

REMARQUE : Si on veut en plus une représentation graphique, alors on change de Python (on laisse tomber Python Idle) et on prend Python Anaconda Spyder qui dispose de superbes librairies graphiques.

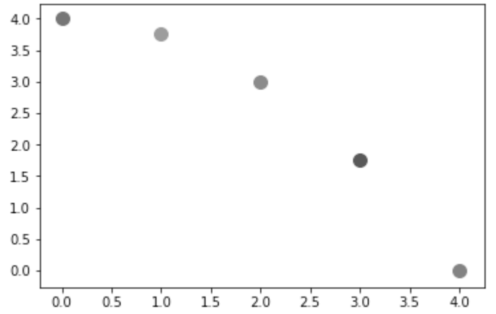
■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_n = 4 - 0,25n^2$. *Déterminer les cinq premiers termes, les représenter graphiquement dans un repère orthogonal (on n'est pas obligé de prendre la même unité).*

On utilise l'algorithme ci-après :

```
import matplotlib.pyplot as plt
Nb_termes=int(input("Nombre de termes?"))
def u(n):
    return(4-0.25*n**2)
for n in range(0,Nb_termes):
    print("u(",n,")=",u(n))
    plt.scatter(n,u(n),s=100)
```

Puis on appuie sur F5, et on obtient pour Nb_termes=5) :

```
Nombre de termes?5
u( 0 )= 4.0
u( 1 )= 3.75
u( 2 )= 3.0
u( 3 )= 1.75
u( 4 )= 0.0
```



Et voilà, elle est pas belle la vie ?

METHODE 5 : Comment déterminer les premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice ?

■ Principe

Avec une TI, on va dans mode (on sélectionne seq >y=(on rentre la suite) avec x,T,θ,n (pour n) > Table(2nde graph) > tblStart=0, Δtbl=1 >Graph>Window (éventuellement).

Avec une Casio, on va dans le menu>8(recur)>F3(type)>F1(an)>(on rentre la suite)>F5(Set, on paramètre le tableau)>Exit>F6(Tabl) et on obtient le tableau de valeur>shift F3>Exit>F6(G-plt) (et on obtient le graphique).

METHODE 6 : Comment déterminer l'expression explicite d'une suite définie par une liste de nombres ?

■ Principe

Retenez bien les exemples de bases qui suivent, ils doivent faire partie de votre culture !

■ **Exemple :** *Dans chaque cas, déterminer l'expression explicite de* U_n.

1) Les nombres pairs 0, 2, 4, 6, 8, 10…
2) Les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11…
3) Les carrés 0, 1, 4, 9, 16, 25…
4) Les cubes 0, 1, 8, 27…
5) La suite d'Oresme-Galilée 0, 5, 20, 45, 80, 125, 180…
6) La suites des nénuphars 1, 2, 4, 8, 16…
7) La suite de Hanoï 0, 1, 3, 7, 15, 31…
8) La suite des triangles 0, 1, 3, 6, 10, 15…

On obtient : 1) $U_n = 2n$ (bah oui, $2\times 0 = 0$, $2\times 1 = 2$, $2\times 2 = 4$, $2\times 3 = 6\ldots$).
2) $U_n = 2n+1$ (En effet, $2\times 0+1=1$, $2\times 1+1=3$, $2\times 2+1=5$, $2\times 3+1=7\ldots$).
3) $U_n = n^2$ (car $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9\ldots$).
4) $U_n = n^3$ (car $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27\ldots$).
5) $U_n = 5n^2$ (car $5\times 0^2 = 0$, $5\times 1^2 = 1$, $5\times 2^2 = 20$, $5\times 3^2 = 45\ldots$ cette suite modélise la distance parcourue par un objet en chute libre au bout de n secondes. Elle fut découverte la 1re fois au Moyen-Âge par l'évêque français Nicolas Oresme, puis retrouvée à la Renaissance par le moine italien Galilée).
6) $U_n = 2^n$ (car $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8\ldots$ cette suite modélise la croissance des nénuphars qui doublent chaque jour).
7) $U_n = 2^n - 1$ (car $2^0 - 1 = 0$, $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7,\ldots$ cette suite modélise le nombre de coups nécessaires pour finir le jeu des tours de Hanoï).
8) $U_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (cette suite modélise les triangles, voir paragraphe 5.)

3. Suite générée par une relation de récurrence

En général, cette notion passe mal et pourtant elle n'a rien de difficile. Une relation de récurrence c'est une relation qui lie entre eux des termes successifs : par exemple la suite $U_0 = 1$, $U_1 = 4$, $U_2 = 7$, $U_3 = 10$, $U_4 = 13\ldots$ est liée à la relation de récurrence $U_{n+1} = U_n + 3$. En effet, on a $U_1 = U_0 + 3$ (car $4 = 1 + 3$), $U_2 = U_1 + 3$ (car $7 = 4 + 3$), $U_3 = U_2 + 3$ (car $10 = 7 + 3$), $U_4 = U_3 + 3$ (car $13 = 10 + 3$). Et voilà, c'est tout : ce n'est pas plus compliqué que cela ! (Le mot récurrence ne doit pas vous faire peur !) Regardons tout cela en détail :

METHODE 7 : Comment déterminer algébriquement les premiers termes d'une suite définie par récurrence ?

■ **Principe**

On calcule de proche en proche en partant du premier terme, c'est tout.

■ **Exemple :** *Soit (U_n) la suite définie par la relation de récurrence :*

$\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 3 \\ U_0 = -6 \end{cases}$. *Déterminer les six premiers termes.*

On a $U_0 = -6$, puis de proche en proche : $U_1 = 2U_0 + 3 = 2\cdot(-6) + 3 = -12 + 3 = -9$,
$U_2 = 2U_1 + 3 = 2\cdot(-9) + 3 = -18 + 3 = -15$, $U_3 = 2U_2 + 3 = 2\cdot(-15) + 3 = -27$,
$U_4 = 2U_3 + 3 = 2\cdot(-27) + 3 = -51$ et $U_5 = 2U_4 + 3 = 2\cdot(-51) + 3 = -99$, tout simplement.

REMARQUE : Comme on peut le voir, on aurait bien envie de se passer de faire des calculs comme cela, de proche en proche ! Imaginez que l'on veuille

déterminer U_{1028} par exemple, et bien il faudrait auparavant déterminer U_{1027}, puis bien sûr U_{1026} et ainsi de suite... ce qui ferait 1029 calculs ! (ça peut durer un bon week-end, et pas très sympa un week-end comme ça !)
La question est donc posée : existe-t-il un moyen d'éviter tout cela en disposant d'une formule donnant U_n en fonction de n ? On verra que pour certaines suites oui, comme celles du chapitre 2 : les suites arithmétiques et géométriques ! (Ouf ! Bonne nouvelle, y aurait-il donc un Dieu ou un génie bienveillant des mathématiques ? Vous allez voir que oui, il s'appelle Gauss !)
Sinon, bien sûr on peut disposer d'un tableur (et lui il ne se plaint jamais !) ou d'un algorithme.

METHODE 8 : Comment déterminer les premiers d'une suite définie par récurrence avec un tableur ?

■ **Principe**
Il faut utiliser la cellule précédente. Voyons cela sur un exemple !

■ **Exemple :** *Soit (U_n) la suite définie par la relation de récurrence :*
$\begin{cases} U_{n+1} = 1{,}5 \times U_n + 2 \\ U_0 = 1 \end{cases}$. *Déterminer les six premiers termes, les représenter graphiquement dans un repère orthogonal.*

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	0	1	2	3	4	5
2	Un	1	3,5	7,25	12,875	21,3125	33,96875

Dans B1, on écrit 0. Dans C1, on écrit 1. On sélectionne la plage B1:C1, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'en G1 (puisqu'on veut 6 termes, on va de U_0 à U_5).
Dans B2, on écrit 1 (c'est la valeur de U_0). Dans C2, on écrit =1,5*B2+2 (c'est la fameuse relation de récurrence !).
On sélectionne la cellule C2, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à G2.
Et voilà, on obtient nos six premiers termes, à savoir : $U_0 = 1$, $U_1 = 3{,}5$, $U_2 = 7{,}25$, $U_3 = 12{,}875$, $U_4 = 21{,}3125$, et $U_5 = 33{,}96875$.

Pour la représentation graphique, on va dans insertion > nuage de points > sélectionner des données > ajouter > valeurs de la série des abscisses x (là on sélectionne la plage B1:G1) > valeurs de la série des ordonnées y (là on sélectionne la plage B2:G2) > OK.